SCIENCE EN HERBE — MATHS TERMINALE S1 & S3

SERIE N°1-2 : LIMITES , CONTINUITES ET DERIVATION

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$ b) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{ax^n-xa^n}{x-a}$ (a ϵ R, n ϵ N*)

d) $\lim\limits_{x\to 10} \frac{\sqrt[3]{x+54}-4}{2\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{20x+16}}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}+ax$ (a ϵ R) f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^n}{2x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x-1}{4(\sin x)^2-3}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin[\sin((\sin x)^2)]}{x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{\sin x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\tan x^2)}{1-\cos x^2}$ l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(\frac{\pi}{6}-x)}{1-2\sin x}$ m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\frac{2\pi x-1}{3x-2})$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2-\sin ax}{x-a}$ (a ϵ R) p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$ q) $\lim\limits_{x\to a} (a^2-x^2)\tan(\frac{\pi x}{2a})$ (a ϵ R)

Exercice 2 :

1) Calculer les limites suivantes si elles existent :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}E(\frac{1}{x})$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right)-x}{E\left(\frac{1}{x}\right)+x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xE(x)-3}{x^2+\sin x}$

2) Soit la fonction f définie par : f(x)=xE($\frac{1}{x}$) , si x ϵ R* et f(0)=1 .

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la continuité de f en $\frac{1}{p}$, p ϵ N , p≥2.

c) Etudier la continuité de f en 1.

Exercice 3 :

Soit g la fonction définie sur R par : f(x)=$\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$ si x ϵ R* et f(0)=0 .

1) Etudier la continuité de f .
2) Démontrer que f admet une bijection réciproque .
3) Construire C_f et $C_f{}^{-1}$.

Exercice 4 :

1)Soit g(x) = 2ax - b - $\sqrt{x^2+1}$.

a) Etudier la limite de g en +∞.

b) Déterminer a et b pour que (D) : x – y + 2 =0 soit une asymptote à la courbe de g en -∞

2) Soit la fonction h définie par : h(x) = $\frac{m\sqrt{x^2+3}-2m|x|}{x^2-1}$ si $|x| \neq 1$

h(x) = $2x^3 + px + 1$ si $|x| = 1$

Déterminer m et p pour que h soit continue sur R.

Exercice 5 :

1) Démontrer que l' équation (E_1): $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'as pas de solutions sur R.
2) a) Déterminer le nombre de solutions de l' équation (E_2) : $x^3 - x^2 - \frac{1}{27} = 0$.
   b) Déterminer un encadrement à 10^{-2} prés.

Exercice 6 :

Démontrer que :

1) Pour tout x ϵ $[-1; 1]$, Arccos(x) + Arcsin(x) = $\frac{\pi}{2}$.

2) Pour tout x ϵ R* , Arctan(x) +Arctan($\frac{1}{x}$) = $\frac{\pi}{2}$sign(x) .

3) Pour tout x ϵ R , Arcsin($\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$) = Arctan(x) .

4) Pour tout x ϵ R , Arccos($\frac{1-x^2}{1+x^2}$) = 2Arctan$|x|$.

Problème 1 :

On considère la fonction f définie par : f(x) = 1 - $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ si x>0 , f(x) = $\frac{1}{2} + \sqrt{|x^2+2x|}$ si x≤0.

Partie A

a) Soit la fonction $\varphi : x \mapsto -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Démontrer que pour tout t élément de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\varphi(\tan t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin t}{2}$.

b) En déduire que $\forall x \geq 0, \varphi(x) \geq 0$.

c) Exprimer f(x) sans le symbole « valeur absolue » sur $]-\infty;-2[$ et sur $[-2;0[$.

d) Démontrer que pour tout x de $[-2;0]$, le point M(x, f(x)) est à une distance constante de Ω(-1, $\frac{3}{2}$)En déduire la nature de (C_f) sur $[-2;0]$.

Partie B

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de en 0 et en -2. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Montrer que f est continue sur IR et dérivable sur $\mathrm{IR}-\{-2;0\}$.

c) Calculer la dérivée f' de f sur chaque intervalle de son domaine de dérivabilité. Puis étudier les variations de f. Dresser le tableau de variation de f.

d) Etudier les branches infinies de (C_f).

e) Construire (C_f).

Partie C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$. vers un intervalle K que l'on déterminera.

b) Soit g^{-1} sa bijection réciproque. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de K.

c) La fonction g^{-1}, est telle dérivable sur K, justifier. Calculer $g^{-1}{}'(x)$.

d) Construire $\left(C_{g^{-1}}\right)$ dans le repère précédent.

Problème 2 :

Pour tout réel strictement positif m,

On note f_m la fonction définie sur $D_m =]-\infty ; 0] \cup]m ; +\infty[$ par $f_m(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-m}}$

et C_m sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (o , i ,j) .

1. a) Justifier la dérivabilité de f_m sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]m ; +\infty[$, et

démontrer que $f'_m(x) = \dfrac{x(2x-3m)}{2(x-m)^2}\sqrt{\dfrac{x-m}{x}}$.

b) Dresser le tableau des variations de la fonction f_m

2. a) Etablir que pour réel x de D_m, on a $f(x) - x = \dfrac{m}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}\right)\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}}$

b) En déduire que la droite D_m, d'équation $y = x + \dfrac{m}{2}$, est asymptote à la courbe C_m en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser la position de la courbe C_m par rapport a la droite D_m .

3. Etudier la dérivabilité de la fonction f_m en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

4. a) Tracer les courbes C_1 , C_2 , C_3 sur le même graphique.

b) Par quelle information géométrique obtient-on :

- La courbe C_2 à partir de la courbe C_1.

- La courbe C_3 à partir de la courbe C_1.
- La courbe C_m à partir de la courbe C_1.

5.a) Pour m positif, montrer que f_m est bilective de $I = \left]\frac{3m}{2};+\infty\right[$ vers un intervalle J à déterminer.

b) Sa bijection f^{-1} est-elle dérivable sur J.

Probléme 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\tan x}{1+\tan x}$, si $x \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

1) a) Montrer que f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et que $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ vers J à déterminer .

Soit g sa réciproque.

3) a) Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ $g'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

b) Ecrire une équation de la tangente T_0 à C_g au point d' abscisse 0.

c) Tracer C_f et C_g .