COMPOSITION N°1-2 DU 1er SEMESTRE :

DUREE : 4H

Exercice 1 :

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20 = 0$$

a) Montrer que $z_0 = 2i$ est une racine. Calculer alors les deux autres racines z_1 et z_2

b) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$; on désigne par A, B, C les points de P d'affixes respectives z_0, z_1, z_2

c) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A;-1);(B;1)$ et $(C;1)$.

d) Déterminer l'ensemble des points M de P tels que $-\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 36$.

Exercice 2 :

Dans le plan oriente, on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. On appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note I le milieu de $[BC]$.

1) Construire J=R(I).
2) On pose $F_1 = RoT$ et $F_2 = ToR$. Déterminer $F_1(J)$ et $F_2(I)$ puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de F_1 et F_2.
3) Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 l'image de M par F_2. Quelle est la nature du quadrilatère BC M_1 M_2 ? Justifier.

Exercice 3 :

Soient (S_n) et (S'_n) deux suites définies par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \cos^p\theta \cos p\theta \text{ et } S'_n = \sum_{p=1}^{n} \cos^p\theta \sin p\theta .$$

On pose $\Sigma_n = S_n + iS'_n$.

Montrer que Σ_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe dont on donnera le 1re terme et la raison ; en déduire la valeur de Σ_n puis celle de (S_n) en fonction de n et θ (on montrera que $S_n = \dfrac{\cos^{n+1}\theta \sin\theta}{\sin\theta}$).

Problème :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + e^x}{2}\right)$

1) a) Etudier les variations de f et démontrer que pour tout $x \in IR$, $f(x) \geq 0$.
   b) Déterminer les asymptotes de C_f et tracer C_f (On pourra montrer à $+\infty$ que $f(x) = x - \ln 2 + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$).

2) a) Démontrer que pour tout réel x : $|f'(x)| < 1$ et $f''(x) = 1 - (f'(x))^2$.

b) Démontrer que si $x \in]-1;+1[$ il existe un unique réel y et un seul tel que $f'(y) = x$.

c) Exprimer y en fonction de x.

3) Soit $n \in IN$, $y \in IR^+$ et $I_n(y) = \int_0^y [f'(x)]^n dx$

a) Justifier l'existence de $I_n(y)$

b) Calculer I_0 et I_1

c) En utilisant $[f'(x)]^2 = 1 - f''(x)$ démontrer que

pour tout $n \geq 2$ $on\ a$ $I_n(y) = I_{n-2}(y) - \frac{1}{n-1}[f'(x)]^n$

a) En déduire que pour tout $p \in IN^*$ $I_p(y) = y - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1}[f'(u)]^{2k-1}$

$$I_{2p-1}(y) = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}[f'(y)]^{2k}$$

b) Démontrer que, pour tout $n \in IN$: $0 \leq \int_0^y (f'(u))^{2p} du \leq y[f'(y)]^{2p}$

c) En déduire y étant fixé que la suite de terme général $\int_0^y (f'(u))^{2p} du$ est convergente.

Préciser sa limite