COMPOSITION N°1 DU 1er SEMESTRE :

DUREE : 4H

Exercice 1 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3}) - 8i$

a) Vérifier que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_1.

b) Résoudre dans C $f(z) = 0$.

c) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions.

d) On considère $M_1(z_1), M_2(z_2)$ *et* $M_3(z_3)$. Montrer que M_1, M_2 *et* M_3 sont sur un même cercle de centre O.

e) Calculer $z_2 - z_3$ *et* $z_2 - z_3$. Déterminer la nature du quadrilatère $OM_1M_2M_3$.

Exercice 2 :

On considère l'application g de $C\setminus\{2i\}$ dans C définie par $g(z) = \dfrac{2z-i}{z-2i}$

a) Résoudre dans C $g(z) = z$. (On notera z_4 *et* z_5 les solutions)
On donnera les solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) Calculer $z_4{}^4 + z_5{}^4$

c) Soit M (z) un point du plan P. Soit (Γ) l'ensemble des ponts M (z) tel que g (z) soit imaginaire pur .Donner une équation cartésienne de (Γ). Tracer (Γ).

d) Montrer que $|z| = 1$ équivaut à $|f(z)| = 1$.

Problème :

I) Soit $g(x) = (1-x)e^{-x} - 1$

1) Etudier les variations de g.
2) Calculer g (0) et en déduire le signe de g(x) sur $\left]-\infty;0\right]$

II) Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = -x + xe^{-x} & si \quad x \le 0 \\ f(x) = \ln|x^2 - 1| & si \quad x > 0 \end{cases}$

C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{J})$ du plan (unité 2cm)

A] 1) Déterminer le domaine de définition D de f
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D.
3) Calculer f '(x) puis dresser le tableau de variation de f.
4) Déterminer, lorsqu'ils existent, les points d'intersection de C_f avec l'axes des de coordonnées.

5) Montrer qu'il existe un unique point E de C_f en le quel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -x$.
Donner une équation de cette tangente (T).

B] Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [0;1]$.

1) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble définition J.

2) Donner le tableau de variation de h^{-1}.

3) h^{-1} est elle dérivable en $y_0 = 0$ *et en* $y_1 = \ln\frac{3}{4}$?
Si oui, donner le nombre dérivé de h^{-1} en chacun de ces points.

4) Expliciter $h^{-1}(x)$ *pour* $x \in J$.

5) Tracer C_f et $C_{h^{-1}}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{J})$