Durée : 6 heures
Toutes séries réunies

SESSION 2005 **CLASSES TERMINALES**

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrice électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

PRELIMINAIRE

1) Déterminer un polynôme P, de degré 3, à coefficients réels, tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) - P(x - 1) = x^2$, et vérifiant $P(0) = 0$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) En utilisant une méthode analogue à celle de la première question, montrer que
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

PARTIE A

(U_n) est une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de raison r et telle que $U_0 = a$ et $U_{n_0+1} = b$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ et n_0 fixé dans $\mathbb{N}$.

1) Si $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que $b - a \in \mathbb{N}^*$ et que r est un diviseur de $b - a$.

2) On suppose dans cette question que r est fixé dans $\mathbb{N}^*$ et que $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$.
Si $b < r(n_0 + 2)$, déterminer le nombre de suites (U_n) possibles.

3) On considère un polynôme φ du second degré tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$.
On suppose dans cette question que la suite (U_n) est strictement croissante et que $\alpha.Q(a) > 0$, $\alpha.Q(b) < 0$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.
Montrer que $a < \dfrac{-\beta}{2\alpha}$.

4) Si $r = a$, avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b = 16\,200$, quel est le nombre de valeurs de a ?

5) On suppose que n_0 est pair avec $n_0 = 2h$; on pose $x = \dfrac{a+b}{2}$.
Calculer $U_0, U_1, \ldots, U_{n_0+1}$ en fonction de x, r et h.

6) On suppose que $U_0, U_1, \ldots, U_{n_0-1}$ sont des entiers impairs consécutifs positifs ou négatifs tels que $U_0 + U_1 + \ldots + U_{n_0-1} = 7^3$.
Donner les valeurs de a et b.

CLASSES TERMINALES

7) S_n est la somme des n premiers termes de la suite (U_n), $r \neq 0$, $a \neq 0$, $n \neq 0$.

a) Déterminer les suites (U_n) telles que $\frac{S_{2n}}{S_n}$ soit indépendant de n.

b) On suppose que $r \neq 0$, $a \neq 0$, $n \neq 0$ et $\frac{S_{2n}}{S_n} = k$, k constante réelle. Donner la valeur de k.

On pose alors $\sum_n = S_2 + S_4 + S_6 + \dots + S_{2n}$.
Mettre $\sum_n$ sous la forme d'un polynôme factorisé, en n.
Calculer $\sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_n$, en fonction de n.

8) Soit $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$, $\forall_n \in \mathbb{N}^*$,
On suppose que $S_n = 3n^2 + 4n$, $\forall_n \in \mathbb{N}^*$.

a) Donner la valeur de la raison r de la suite (U_n) et celle de U_0.

b) Montrer qu'il y a une infinité de termes de la suite (U_n), qui sont des carrés parfaits et donner la forme générale des indices de ces termes.

9) On pose : $U_m = \lambda$, $U_n = \mu$ et $U_p = \gamma$ avec $r \neq 0$.
Montrer que : $\lambda (n - p) + \mu (p - m) + \gamma (m - n) = 0$.

10) On pose: $w_n = e^{U_n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

a) Quelle est la nature de la suite (w_n) ?

b) Si x, y et z sont des termes consécutifs de la suite (w_n), montrer que :
$\forall k \in \mathbb{Z}$, $(x^k + y^k + z^k)(x^k - y^k + z^k) = x^{2k} + y^{2k} + z^{2k}$.

c) x, y et z étant des réels tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on ait
$(x^k + y^k + z^k)(x^k - y^k + z^k) = x^{2k} + y^{2k} + z^{2k}$, donner les conditions sur k, x et z pour que x, y et z soient 3 termes consécutifs d'une suite géométrique.

d) Déterminer 3 termes consécutifs d'une suite géométrique (t_n) sachant que la somme de leurs inverses est égale à 26 et que la somme des carrés de leurs inverses est égale à 364.

e) Montrer que si $t_m = s$, $t_n = h$ et $t_p = e$ alors $s^{n-p} \cdot h^{p-m} \cdot e^{m-n} = 1$.

11) Soit $f : x \mapsto f(x) = x^2 e^x$.

a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose que (U_n) a pour raison $r = 2$ et que $a = 0$.
Montrer que $f^{(n)}$, fonction dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur $\mathbb{R}$, vérifie :
$\forall\ x \in \mathbb{R}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + x\,U_n + V_n)$, où (V_n) est une suite à déterminer.
Calculer U_n et V_n en fonction de n.

.../… 3

c) Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal, on considère les points M_n (U_n, V_n). Montrer que si $n \geq 1$, M_n appartient à une parabole (P) dont on donnera une équation et les éléments caractéristiques.

12) On suppose que $\tan(2a) = 2$, que $0 < a < \frac{\pi}{4}$ et que $b - a = (n_0 + 1)\frac{\pi}{2}$.

On considère la fonction $g : x \mapsto g(x) = e^{-x} \sin(2x)$.

a) Etudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout réel x, calculer g'(x).

c) Montrer que les solutions de l'équation $g'(x) = 0$ sont les termes de la suite (U_n) et que les images par g de ces solutions sont des termes d'une suite géométrique dont on donnera la raison et dont on étudiera le sens de variation et la convergence.

PARTIE B

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que $0 < a < b$, $U_0 = a$ et $U_{n_0+1} = b$.

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2) a) Montrer que la fonction $\exp_e : x \mapsto e^x$ peut s'écrire $\exp_e = \varphi + \psi$ où φ est une fonction paire et ψ une fonction impaire, définies sur $\mathbb{R}$ et à déterminer.

b) Etudier les variations de φ et ψ et tracer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes(C) et (C') représentatives de φ et ψ respectivement.

c) Montrer que ψ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque ψ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $[\varphi(x)]^2 - [\psi(x)]^2 = 1$ et en déduire l'expression de $(\psi^{-1})'(x)$ en fonction de x et la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

d) On considère le domaine $(D_n) = \{M(x,y) \in P \,/\, 0 \leq x \leq U_n \text{ et } \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$

Calculer en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}_n$ de (D_n).

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) On considère la courbe (H) : $2xy = 1$. Soit A le point de (H) d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et M le point de (H), de coordonnée (x,y). On désigne par A' et M' les projetés orthogonaux respectifs de A et M sur l'axe (ox) du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et K le point d'intersection de (OA) et (MM').

a) Démontrer que le triangle OMK et le trapèze A'A K M' ont même aire .

En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine curviligne fermé OAM limité par [OA], [OM] et l'arc de (H) limité par A et M.

b) On veut que $\mathcal{A} = U_n$.
Calculer alors, en fonction de U_n, les coordonnées x et y de M, dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

c) X et Y étant les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ déduit du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par la rotation R $(0, \frac{\pi}{4})$ de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$; montrer que : $X = \varphi(2\, U_n)$ et $Y = \psi(2\, U_n)$.

d) Calculer $X^2 - Y^2$ et en déduire la nature de (H) et ses éléments caractéristiques.

e) On considère un triangle EFG dont les 3 sommets appartiennent à un même arc de (H) ; montrer que l'orthocentre T de ce triangle appartient à cet arc de (H).

f) Ω étant le centre du cercle circonscrit au triangle EFG,
on pose : $\vec{v} = \overrightarrow{\Omega T} - \overrightarrow{\Omega E} - \overrightarrow{\Omega F} - \overrightarrow{\Omega G}$.

- Montrer que : $\vec{v} \perp \overrightarrow{FG}$ et que $\vec{v} \perp \overrightarrow{EF}$.
  En déduire que : $\overrightarrow{\Omega T} = \overrightarrow{\Omega E} + \overrightarrow{\Omega F} + \overrightarrow{\Omega G}$.

- Les points E, F et G décrivent un même arc de la courbe (H)de telle sorte que, pour tout réel x, on ait : $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \lambda) = x^3 - \frac{1}{2}$.
  Déterminer la position du point Ω.

BAREME

PRELIMINAIRE **(0,5 point)**

1) = 0,25 point 2) = 0,25 point

PARTIE A **(12,5 points)**

1) =0,5 pt 2) = 0,5 pt 3) = 0,5 pt 4) = 0,5 pt 5) = 0,5 pt 6) = 0,5 pt 7) a) = 0,5 pt
b) = 0,75 pt

8) a) = 0,5 pt
b) = 0,75 pt

9) = 0,5

10) a) = 0,5 pt
b) = 0,5 pt
c) = 0,75 pt
d) = 0,5 pt
e) = 0,5 pt

11) a) = 0,5 pt
b) = 0,75 pt
c) = 0,75 pt

12 a) = 0,5 pt
b) = 0,5 pt
c) = 0,75 pt

PARTIE B **(07 points)**

1) = 0,5 pt

2) a) = 0,5 pt
b) = 01 pt
c) = 01 pt
d) = 0,5 pt

3) a) = 0,5 pt
b) = 0,5 pt
c) = 0,5 pt
d) = 0,5 pt
e) = 0,5 pt
f) = 01 pt