

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants calculer les limites aux bornes des domaines de définition de f :

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= \frac{2x}{x^2-1} ; \text{ b)} f(x) = \frac{2x^2-3x}{3} ; \text{ c)} f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x-2}} ; \text{ d)} f(x) = \frac{3-\sqrt{x+6}}{x-3} \\ \text{e)} f(x) &= \frac{x^2+3}{x^2+x-2} ; \text{ f)} f(x) = \frac{1}{-4x^2+x+2} ; \text{ g)} f(x) = \frac{3x^2-2}{-2x+3} \\ \text{h)} \begin{cases} f(x) = \sqrt{2x^2+4x+2}, \text{ si } x < 1 \\ f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}, \text{ si } x \geq 1 \end{cases} ; \text{ i)} \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2+x} + \sqrt{|x+1|}, \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Dans chaque cas étudier la limite de f en a :

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+2x-3}} \quad a = 1 ; \text{ b)} f(x) = \frac{x^2+3x-4}{|x^2-1|} \quad a = 1 ; \text{ c)} f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} \quad a = 2 \\ \text{d)} f(x) &= \frac{x^2+|x|}{x} \quad a = 0 ; \text{ e)} f(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} \quad a = 0 ; \text{ f)} f(x) = \frac{\sqrt{4x+2}-3}{x^2-x-2} \quad a = 2 \\ \text{g)} f(x) &= \frac{x^2-7x+12}{(x-3)^2} \quad a = 3 ; \text{ h)} f(x) = \frac{\sqrt{|x|-1}}{|x|-1} \quad a \in \{-1; 1\} ; \text{ i)} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}{x^2-16} \quad a = 4 \\ \text{j)} f(x) &= \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+2}-2} \quad a = 0 ; \text{ k)} \frac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{2x-1}}{x-1} \quad a = 1 \end{aligned}$$

Exercice 3 :

f est une fonction numérique de la variable réelle x, (C) est sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé.

Etudier les branches infinies de (C) dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= -2x + \sqrt{x^2+x} ; \text{ b)} f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1} ; \text{ c)} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} ; \text{ d)} f(x) = x - \sqrt{x+1} \\ \text{e)} \begin{cases} f(x) = \sqrt{2x^2+4x+2}, \text{ si } x < 1 \\ f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}, \text{ si } x \geq 1 \end{cases} ; \text{ g)} \begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - x, \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{-x}}, \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Dans chacun des suivants, étudier la continuité de f en a :

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= (1-x)\sqrt{1-x^2} \quad a = 1 \text{ ou } a = -1 ; \text{ b)} f(x) = |x^2-4x|-3 \quad a = 4 \text{ ou } a = 0 \\ \text{d)} \begin{cases} f(x) = \sqrt{|x^2-x|}, \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x-2}, \text{ si } x < 1 \end{cases} \quad a = 1 ; \text{ e)} \begin{cases} f(x) = (x-1)\sqrt{x-1}, \text{ si } x > 1 \\ f(x) = \frac{x-2}{(x+2)(x^2+2)}, \text{ si } x \leq 1 \end{cases} \quad a = 1 \end{aligned}$$

Exercice 5 :

Soit la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- Donner l'expression de f sur $]-\infty; 1]$ et sur $]1; +\infty[$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis celle en $-\infty$.
- Prouver que, pour tout $x \in]-1; 0[\cup]0; 1[$ on a : $x - x^2 < f(x) \leq x$.
- Prouver que f est continue en 0.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de f sur $\left]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$.
- En déduire que f n'est pas continue en $\frac{1}{x}$.