SCIENCE EN HERBE MATHS TERMINALE S2 & S4 & S5

DEVOIR N°2-1 DU 2nd SEMESTRE :

DUREE : 4H

Exercice 1 :

1. Résoudre dans C : $z^4 = 1$

2. On considère l'équation (E) : $z^4 + (7+24i) = 0$

a. Vérifier que $z_0 = 2 - i$ est solution de (E).

b. En déduire les solutions de (E).

3. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives : $1+2i$; $-2+i$; $-1-2i$; $2-i$

a. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s_1 de centre Ω, qui à A associe B.

b. Soit s_2 la similitude directe définie par : $s_2 : z \to z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}$

Donner les éléments caractéristiques de la similitude s_2 et en déduire celles de la similitude s telle que $s = s_2 o s_1$

c. Déterminer le nombre réel m pour que Ω soit le barycentre des points A, B, C affectes respectivement des coefficients 1 ; m ; 1.

Exercice 2 :

Une urne contient 5 jetons blancs (un carré, trois ronds et un triangle), quatre jetons noirs (trois carrés et un triangle) et trois jetons rouge (un carré et deux ronds).
On tire simultanément trois jetons de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages comportant :
   - **a.** trois jetons de couleurs différentes.
   - **b.** trois jetons de formes différentes.
   - **c.** trois jetons de même forme.
   - **d.** trois jetons de même couleur.
   - **e.** trois jetons de même forme et de même couleur.
   - **f.** trois jetons de formes différentes et de couleurs différentes.
   - **g.** un jeton d'une couleur et deux d'une autre.
   - **h.** exactement deux jetons noirs et un carré.

Problème :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x(-1+\ln x)^2 + x \quad \forall x \in IR^*_+ \end{cases}$

1. a. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

b. f est –elle continue à droite en 0 ?

c. f est –elle dérivable à droite en 0 ? Que peut-on déduire?

2. Etudier les variations de f sur IR_+^*.

3. Soit (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, unité 2cm.
Former des équations de (T_1) et (T_2) tangentes de (Γ) aux points d'abscisses 1 et e.
Tracer (T_1) et (T_2) et (Γ).

4. a. Démontrer f admet une application réciproque f^{-1}.

b. Etudier la continuité, la dérivabilité et le sens de variation de f^{-1} sur son domaine.

c. Tracer (Γ') représentant f^{-1} dans $(O;\vec{i};\vec{j})$

5. Soit α un réel, $0 < \alpha < e$ et pour tout n de IN. $I_n(\alpha) = \int_\alpha^e x(\ln x)^n\,dx$

a. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-1}(\alpha)$

b. Calculer $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.

c. Soit $J(\alpha) = \int_\alpha^e f(x)dx$

Exprimer $J(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$, puis en fonction de α seulement.

d. Calculer $\lim_{\alpha \to 0^+} J(\alpha)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

f. Soit P (0 ; e), Q(e ; e) et R(e ; 0) trois points du plan et (Δ) la droite d'équation $y = x$
Comparer les aires des parties du carré OPQR **:**

S₁ : « *au dessus de (Γ)* » **S₂** « *comprise entre (Γ) et (Δ)* »
S₃ « *comprise entre (Γ') et (Δ)* » **S₄** : « *au dessus de (Γ')* »