UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 33 824 65 81 - Tél. : 33 824 95 92 - 33 824 65 81

09 G 26 A 01

Durée : 4 heures

Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1[er] groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE I (03 Points)

1) (X,Y) est unes série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X.

Soit (D_2) la droite de régression de X en Y. On suppose que :

$(D_1) : y = a x + b$ et $(D_2) : x = a' y + b'$.

Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Etablir que $r^2 = aa'$. **(01 point)**

2) Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :

- la droite de régression de Y en X a pour équation : $2{,}4x - y = 0$
- la droite de régression de X en Y a pour équation : $3{,}5\, y - 9\, x + 24 = 0$.

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance est positive.

(0,5 point)

b) Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y. **(0,75 + 0,75 point)**

EXERCICE II (05 Points)

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux qui portent le nombre e et six qui portent le nombre $\frac{1}{e}$.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus, respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés.

A cette expérience, on associe le point M d'affixe $z = \ln x + i \ln y$.

1) Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : ''M appartient à l'axe des abscisses'' ; **(0,5 point)**

B : ''M appartient à l'axe des ordonnées'' ; **(0,5 point)**

C : ''M appartient aux deux axes'' ; **(0,5 point)**

D : ''M n'appartient à aucun des axes'' ; **(0,5 point)**

E : ''l'angle $(\overrightarrow{OM}, \vec{i})$ est égal à $-\frac{\pi}{4}$'' ; **(0,5 point)**

F : ''le point M appartient au cercle trigonométrique ''. **(0,5 point)**

2) Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance OM.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. **(01 point)**

b) Déterminer la fonction de répartition de X. **(01 point)**

EXERCICE III **(05 Points)**

1- Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$. **(0,5 point)**

2- Soit (E') l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = x + 3$.
Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$, soit solution de (E'). **(0,25 point)**

3a- Démontrer que g est solution de (E') si et seulement $g - h$ est solution de (E). **(0,5 point)**

3b- Résoudre alors (E'). **(0,25 point)**

3c- Déterminer la solution f de (E) telle que : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$. **(0,5 point)**

4- Soit la fonction k définie par $k(x) = (x + 2)e^{-x}$.

4a- Etudier les variations de k. **(01,5 point)**

4b- Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ de k au point d'abscisse 0. **(0,25 point)**

4c- Démontrer que le point I (0 ; 2) est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$. **(0,5 point)**

4d- Tracer $(\mathcal{C})$ et (T) dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(0,75 point)**

EXERCICE IV **(07 Points)**

1a- Etudier les variations de la fonction f définie sur $]-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(x+1)$. **(01,5 point)**
Tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité : 2 cm. **(01 point)**

1b- Démontrer que sur $[2 ; +\infty[$ la fonction ℓ, définie par $\ell(x) = f(x) - x$, est bijective et l'équation $\ell(x) = 0$ admet une solution unique λ. **(01 point)**

2- On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2\ln(1 + U_n) \end{cases}$$

2a- Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique. **(0,5 point)**

2b- Démontrer par récurrence que pour tout n, $U_n \geq 2$. **(0,5 point)**

2c- Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[2 ; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. **(0,5 point)**

2d- En déduire que pour tout n, on a : $|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$, **(0,5 point)**

que $|U_{n+1} - \lambda| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, et que la suite (U_n) converge vers λ. **(0,5 + 0,25 point)**

2e- Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}$. Que représente U_p pour λ.
(0,25 + 0,5 point)