Avril 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

Exercice I.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1- La fonction f est clairement différentiable en tout pout $(x,y) \neq (0,0)$ comme produit et composée de fonctions différentiables et on a pour tout pout $(x,y) \neq (0,0)$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$(df(x,y))(h,k) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big)h + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)k,$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Montrons la différentiabilité au point $(0,0)$: on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(h^2\sin\frac{1}{|h|}\Big) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\Big(k^2\sin\frac{1}{|k|}\Big) = 0\,.$$

D'autre part,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,,$$

ce qui montre que f est différentiable au point $(0,0)$ et pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$(df(0,0))(h,k) = 0.$$

2- Étudions la limite dans la direction de la première bissectrice (i.e. $y = x$) : pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{2x^2}} - \frac{x}{\sqrt{2x^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2x^2}} = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|} - \frac{x}{\sqrt{2}|x|}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{2y^2}} - \frac{y}{\sqrt{2y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2y^2}} = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{2}|y|} - \frac{y}{\sqrt{2}|y|}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|y|}\,,$$

les deux dernières expressions n'admettent pas de limite lorsque $x \to 0$ et respectivement lorsque $y \to 0$. On en déduit que les dérivées partielles de f ne sont pas continues au point $(0,0)$.

Exercice II.

Pour tout nombre réel $u \in]0,1[$, on définit la fonction φ_u de la variable réelle t par :

-Pour tout $t \in [-\pi, \pi[$, $\varphi_u(t) = \cos ut$,

-La fonction φ_u est périodique de période 2π.

1- La fonction φ_u est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il suffit d'établir la continuité en π pour en déduire, par 2π-périodicité, la continuité de φ_u sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \in [\pi, 3\pi[$,on a $\varphi_u(t) = \varphi_u(t-2\pi) = \cos u(t-2\pi)$ et $\lim\limits_{t\to\pi_+} \varphi_u(t) = \cos u\pi$ qui est égal à $\lim\limits_{t\to\pi_-} \varphi_u(t)$.

La continuité en π permet d'écrire $\varphi_u(t) = \cos ut$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

2- Notons s la série de fourier de φ_u, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big\{ a_n(u)\cos nt + b_n(u)\sin nt \Big\},$$

avec

$$a_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t)\cos nt\, dt\,,$$
$$b_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t)\sin nt\, dt\,.$$

La fonction φ_u est paire sur $[-\pi, \pi]$, donc $b_n = 0$, pour tout $n \in N^*$. D'où

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(u)\cos nt.$$

3- Par la parité de φ_u, on a

$$a_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t)\cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_u(t)\cos nt\, dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} a_n(u) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ut \cos nt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(u-n)t + \cos(u+n)t\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(u-n)t}{u-n} + \frac{\sin(u+n)t}{u+n}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2u\sin u\pi}{u^2-n^2}. \end{aligned}$$

4- La fonction φ_u est de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers φ_u. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_u(t) = \frac{\sin u\pi}{\pi u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2u\sin u\pi}{u^2-n^2}\cos nt.$$

5 Pour $t = \pi$ le calcul de la somme de la série de Fourier de φ_u donne, après division par $\sin \pi u \neq 0$:

$$\forall u \in]0,1[, \quad \frac{\pi\cos\pi u}{\sin\pi u} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2-n^2},$$

d'où l'égalité demandée.

Problème III.

1- Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \,.$$

a) Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Puisque A est nilpotente d'indice 3, on a $A^3 = 0$, d'où $A^4 = A.A^3 = 0$ et donc

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= (I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(I_p + sA + \frac{s^2}{2}A) \\ &= I_p + (s+t)A + (\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2})A^2 + (\frac{st^2}{2} + \frac{ts^2}{2})A^3 + \frac{s^2t^2}{4}A^4 \,, \end{aligned}$$

d'où $E(s)E(t) = A + (s+t)A + \dfrac{(s+t)^2}{2}A^2 = E(s+t)$.

b) Par récurrence : pour $n = 0$ la relation est clairement vraie car $E(0) = I_p = \big(E(0)\big)^0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on $(E(t))^n = (E(t))^{n-1}E(t) = E((n-1)t)E(t) = E(nt)$.

c) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $E(0) = I_p = E(t-t)$. Puis, par la relation démontrée précédemment, $E(t)E(-t) = E(0) = I_p$.
La matrice $E(t)$ est donc inversible d'inverse $E(-t)$.

d) Soient α, β, γ des réels tels que $\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0$.
Multiplions cette égalité par A^2. On obtient $\alpha A^2 + \beta.0 + \gamma.0 = 0$ et donc $\alpha = 0$.
En multipliant alors l'égalité par A, on déduit $\beta = 0$ et donc $\gamma A^2 = 0$ avec $A^2 \neq 0$. Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
La famille (I, A, A^2) est libre.

e) Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $E(s) = E(t)$. Alors,

$$I_p = E(0) = E(s)E(-s) = E(t)E(-s) = E(t-s),$$

ce qui donne

$$I_p \iff I_p + (t-s)A + \frac{(t-s)^2}{2}A^2 = I_p \iff (t-s)A + \frac{(t-s)^2}{2}A^2 = 0.$$

Or la famille (I, A, A^2) est libre ; on déduit alors $t - s = 0$. L'application E est donc injective de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p$.

f) Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient après calcul

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2- Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

a) Dans $\mathcal{B}_0$ la matrice de $f - 2I_2$ est $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Soit $u = (x, y)$. $u \in F \iff \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x - 3y = 0$. On reconnaît l'équation, dans le plan, d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\vec{u} = (3, 1)$.

De même, dans $\mathcal{B}_0$ la matrice de $f - I_2$ est $A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $v = (x, y)$. $v \in G \iff \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x - 2y = 0$. On reconnaît, là encore l'équation d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\vec{v} = (2, 1)$.

Il reste à montrer que F et G sont supplémentaires : soit $\vec{u} \in F \cap G$, comme $\vec{u} \in F$ et $\vec{u} \in G$ on a $(f - 2I_2)(\vec{u}) = 0$ et $(f - I_2)(\vec{u}) = 0$ ce qui implique $f(\vec{u}) = 2\vec{u} = \vec{u} \implies \vec{u} = \vec{0}$ Donc $F \cap G = \{\vec{0}\}$. De plus $\dim(F) + \dim(G) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que F et G sont supplémentaires.

b) On a $\vec{u} \in F \implies f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $\vec{v} \in G \implies f(\vec{v}) = \vec{v}$. Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, et D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
La formule de changement de base pour les endomorphismes se traduit, ici, par $D = P^{-1}AP$ ou encore $PDP^{-1} = A$ (on a multiplié l'égalité précédente à gauche par P et à droite par P^{-1}).
$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PD^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D...DP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1} . \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: la relation est évidemment satsfaite pour $n = 1$. Supposons que la relation est satsfaite pour un entier n, on a alors

$$D^{n+1} = D^nD = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi,

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 6 - 6.2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2.2^n \end{pmatrix}.$$

3- On reprend les notations de la partie **1-**.

a) La fonction exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$, où $\exp^{(n)}$ désigne la dérivée $\text{n}^{\text{ème}}$ de la fonction exp. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)}(0) = 1$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.
Si $t \in \mathbb{R}_+$. On sait que la fonction exp est croissante sur $[0, t]$, donc $\forall u \in [0, t]$, $\exp^{(n+1)}(u) \leqslant e^t$. Alors l'inégalité de Taylor Lagrange, appliquée à la fonction exp s'écrit :

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant e^t \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Or on sait (comparaison des fonctions puissances et des factorielles) que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. De plus e^t ne dépend pas de n. Donc $\lim_{n\to+\infty} e^t \dfrac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right) = e^t.$$

Si $t \in \mathbb{R}_-$. Par la monotonie de la fonction exp sur $[t, 0]$, pour tout $u \in [t, 0]$, $\exp^{(n+1)}(u) \leqslant 1$. Par l'inégalité de Taylor Lagrange

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On obtient de même $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!} \right) = e^t$.

b) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après la définition de $E_n(t)$ et la question **2- d)**,
$a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!}(3.2^k - 2) = 3\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!}$,
$b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!}(6 - 6.2^k) = -6\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2t)^k}{k!} + 6\sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!}$,
$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!}(2^k - 1) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!}$,
$d_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!}(3 - 2.2^k) = -2\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2t)^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!}$.

c) En utilisant le résultat de **3- a)** appliqué au réel $2t$ on a : $\lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$.
Alors : $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$, $\quad b(t) = -6e^{2t} + 6e^t$, $\quad c(t) = e^{2t} - e^t$, $\quad d(t) = -2e^{2t} + 3e^t$.
Ainsi $E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$.

d) $E(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
D'où $Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

e) Après un calcul matriciel classique, on obtient $Q^2 = Q$, $R^2 = R$, $RQ = QR = 0$.

on a $Q^2 = Q$ et $R^2 = R$ donc q et r sont des projections.
D'autre part, $Q = A - I_2$ et donc $\mathrm{Ker}(q) = G$.
De même $R = -A + 2I$ et donc $\mathrm{Ker}(r) = F$.
On a
$q(u) = u \iff (f - I_2)(u) = u \iff (f - 2I_2)(u) = 0 \iff u \in F$. Donc q est la projection sur F de direction G.
De même
$r(u) = u \iff (-f + 2I_2)(u) = u \iff (f - I_2)(u) = 0 \iff u \in G$. Donc r est la projection sur G de direction F.

f) D'après le résultat de la question **3- e)**

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= \left(e^{2s}Q + e^s R\right)\left(e^{2t}Q + e^t R\right) \\ &= e^{2(s+t)}Q^2 + e^{2s+t}QR + e^{s+2t}RQ + e^{s+t}R^2 \\ &= e^{2(s+t)}Q + e^{s+t}R \\ &= E(s+t). \end{aligned}$$

On en déduit alors, que pour $n \in \mathbb{N}$, $(E(t))^n = E(nt)$, $E(0) = I_2$ et $E(-t)E(t) = E(0) = I$ et donc $(E(t))^{-1} = E(-t)$.
Il nous reste à montrer que E est injective : soient $s, t \in \mathbb{R}$, tels que $E(t) = E(s)$, alors $E(t)E(-s) = E(t-s) = I_2$, car $(E(s))^{-1} = E(-s)$.

Posons $u = t - s$, on a

$$\begin{aligned} E(u) = I_2 &\iff \left\{ \begin{array}{c} 3e^{2u} - 2e^u = 1 \\ -6e^{2u} + 6e^u = 0 \\ e^{2u} - e^u = 0 \\ -2e^{2u} + 3e^u = 1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} e^u = e^{2u} \\ e^u = 1 \end{array} \right. \iff u = 0 \iff t = s\,. \end{aligned}$$

Donc E est injective.

AVRIL 2016

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Pour $k>1$ et $x \in R$ positif, on pose

$$f_k(x)=\frac{((k-1)x+1)^{k/k-1}-kx-1}{k}$$

et

$$f_k^*(y)=\underset{x\in R}{Sup}(xy-f_k(x))$$

1. Etudier les variations et tracer le graphe de $f_3(x)$.

   On a : $f_3(x)=\dfrac{(2x+1)^{3/2}-3x-1}{3}$ et sa dérivée est égale à : $f'_3(x)=\sqrt{2x+1}-1>0$.
   La fonction est donc strictement croissante sur les réels positifs, avec une branche parabolique dans la direction *Oy*. Elle présente une tangente horizontale en 0.

2. Calculer $f_2^*(x)$.

   Pour $k=2$, $f_2(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ et $f_2^*(y)=\underset{x}{Sup}(xy-\dfrac{1}{2}x^2)=\dfrac{1}{2}y^2$. Car cette borne supérieure est atteinte pour $x=y$

3. Etudier la convexité de $f_k(x)$.

   On a : $k\,f_k'(x)=k((k-1)x+1)^{1/k-1}-1)$. Posons $u=((k-1)x+1)^{1/k-1}-1$, on obtient : $u'=((k-1)x+1)^{2-k/k-1}>0$, la dérivée seconde de $f_k(x)$ étant strictement positive, la fonction est convexe. (Comme $k>1$ et $x\in R$ positif, la racine est bien définie).

4. Calculer $f_k^*(y)$ pour tout $k>1$.

   Soit $g(x)=xy-f_k(x)$, alors $g'(x)=y-f_k'(x)=0$ pour $x=\dfrac{(y+1)^{k-1}-1}{k-1}$ et en remarquant que : $((k-1)x+1)^{k/k-1}=(y+1)^k$, on obtient : $f_k^*(y)=\dfrac{(1+y)^k-ky-1}{k(k-1)}$

Exercice n° 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n (entier strictement supérieur à 2) et f un endomorphisme sur E vérifiant : $(f - a\,Id)\,o\,(f - b\,Id) = 0$, où $a, b \in R, a \neq b$ et Id désigne l'application identique de E.

1. Montrer que l'on peut trouver deux nombres réels λ, μ tels que :

   $p = \lambda(f - a\,Id)$ et $q = \mu(f - b\,Id)$ soient des projections (on rappelle qu'une application linéaire φ de E dans E est une projection si $\varphi\, o\, \varphi = \varphi$).

   Quelle relation existe-t-il entre p et q ?

   On a : $pop = \lambda^2 (b - a)(f - aId)$ et $pop = p \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{b-a}$

   De même, $qoq = q \Leftrightarrow \mu = \dfrac{1}{a-b}$

   On vérifie que : $p + q = Id$

2. Exprimer f à l'aide de p et q. En déduire $f^n = fofo....f$

   On obtient $f = (b-a)p + aId = bp + aq$ et $f^n = b^n p + a^n q$

3. Montrer que si $ab \neq 0$, l'application f est inversible. Exprimer son inverse f^{-1} à l'aide de p et q.

   On obtient : $f^{-1} = \dfrac{1}{ab}((a+b)Id - f) = b^{-1} p + a^{-1} q$

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$, où m est un paramètre réel non nul.

   Déterminer a et b tels que : $(A - a\,I)(A - b\,I) = 0$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3. En déduire A^n.

   Si $(A - a\,I)(A - b\,I) = 0$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, a et b sont les valeurs propres de la matrice A.

   On obtient : $\det(A - \delta\,I) = (\delta + 1)^2 (\delta - 2), a = 2, b = -1$ ou l'inverse et $A^n = (-1)^n q + 2^n p$

Exercice n° 3

On note C l'ensemble des nombres complexes et f l'application de C dans C définie, pour $z \neq 2i$, par : $f(z) = \frac{z-1}{z-2i}$

1. Donner les formes cartésiennes et trigonométriques de *f(i)*.

   $f(i) = -1 - i = \sqrt{2}\,(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$

2. Résoudre l'équation : $f(z) = 2i$

   $f(z) = 2i \Leftrightarrow z - 1 = 2i\,(z - 2i) \Leftrightarrow z(1-2i) = 5 \Leftrightarrow z = 1 + 2i$

3. Déterminer l'ensemble D des points M tels que $|f(z)| = 2$

   $|f(z)| = 2 \Leftrightarrow |x + iy - 1| = 2|x + iy - 2i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y-2)^2)$, d'où

   $|f(z)| = 2 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{8}{3})^2 = \frac{20}{9}$

   Il s'agit donc d'un cercle de centre (-1/3, 8/3) et de rayon : $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,1[$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$

1. Etudier les variations de *f*.

   On a $f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^2}$. Le numérateur est toujours négatif. La fonction f est donc strictement décroissante de $]0,1[$ dans R.

2. Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.
   Le graphe de f est symétrique par rapport au point $A(1/2, 0)$, en effet si on pose $X = x - 1/2$, on obtient $f(X) = \frac{2X}{X^2 - 1/4}$ qui est impaire.

3. Trouver une primitive de *f* sur $]0,1[$.

   Une primitive de f sur $]0,1[$ est $F(x) = Ln\,x(1-x) + Cste$.

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de *f* et les droites d'équation *x*=1/2 et *x*=2/3

L'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x=\frac{1}{2}$ et $x=\frac{2}{3}$ est égale à : $Ln\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})-Ln\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})=Ln\frac{9}{8}$.

5. Soit la fonction numérique g définie sur $]0,1[$ par : $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$. Trouver la primitive G de g qui vérifie : $G(1/2)=6$.

   On obtient $G(x)=-\dfrac{1}{x(x-1)}+k$ et avec $G(\frac{1}{2})=6$, $k=2$

6. Comparer la position des graphes de f et g sur . $]0,1[$.

   Pour $x\in]0,1[$, $f(x)\le g(x)\Leftrightarrow 2x-1\ge\dfrac{2x-1}{x(x-1)}$

   Si $x\ge 1/2$, $f(x)\le g(x)$

   Si $x\le 1/2$, $f(x)\ge g(x)$

Exercice n° 5

Pour $\alpha\in]-1,1[$, on considère l'équation fonctionnelle (*E*) suivante :

$$\forall x\in R,\quad f(x)=(1-x)\,f(\alpha x)$$

où f est une fonction continue.

1. Comparer deux solutions f et g de (*E*) qui vérifient : $f(0)=g(0)$

   Si f est solution de (E) alors $f(x)=\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha^k x)f(\alpha^{n+1}x)$. Quand n tend vers plus l'infini, $f(\alpha^{n+1}x)\to f(0)$ tandis que la suite de terme général $\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha^k x)$ converge. En effet, pour N assez grand, $\forall n\ge N,\prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x)>0$ et $Ln(\prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x))=\sum_{k=N}^{n}Ln(1-\alpha^k x)$ et $Ln(1-\alpha^k x)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, $\forall x\in R,\quad f(x)=f(0)\prod_{k=0}^{\infty}(1-\alpha^k x)$. La fonction g a une expression de la même forme, d'où l'égalité de f et g lorsque $f(0)=g(0)$.

2. Montrer que les solutions de (E) sont développables en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

   A partir de l'expression $f(x) = f(0)\prod_{k=0}^{\infty}(1-\alpha^k x)$ et par calcul, on obtient que pour $a_0 \in R$ et pour tout n, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha^n}{(1-\alpha^{n+1})}a_n$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in R$ et sa fonction somme $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation prenant la valeur a_0 en 0.

   Ainsi toutes les fonctions f solutions de (E) sont développables en série entière sur R et on vérifie $f(x) = f(0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{\alpha^k}{1-\alpha^{k+1}}\right)x^n$

Exercice n° 6

Pour n entier naturel, on définit la suite des intégrales $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^{2n}(x)\,dx$

1. Montrer que J_n existe pour tout n. Calculer J_0

   On a un problème en $+\infty$ et $\left|e^{-x}\sin^{2n}(x)\right| \le e^{-x}$, l'intégrale est donc convergente et $J_0 = 1$.

2. Pour n non nul, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}. En déduire une expression de J_n en fonction de n.

   Avec deux intégrations par parties et en posant chaque fois $v'(x) = e^{-x}$, on obtient :

   $$J_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1}J_{n-1} \text{ et } J_n = 2^n\prod_{k=1}^{n}\frac{k(2k-1)}{4k^2+1}$$

3. Etudier la convergence de la suite (J_n)
   La suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

4. Déterminer la nature de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ de terme général : $u_k = Ln\left(\dfrac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$ et en déduire la limite de la suite (J_n).

   $u_k = Ln\left(\dfrac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) = Ln\left(1-\dfrac{1+2k}{1+4k^2}\right) \approx -\dfrac{1}{2k}$ et la série est divergente vers moins l'infini.

On a : $Ln\ \dfrac{J_k}{J_{k-1}} = Ln\left(\dfrac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$

et $\sum_k Ln\ \dfrac{J_k}{J_{k-1}} = \sum_k Ln\, J_k - \sum_k Ln\, J_{k-1} = Ln\, J_n = \sum_k u_k$,
donc $Lim\, Ln\ J_n = -\infty$ et $Lim\, J_n = 0$