SCIENCE EN HERBE **MATHS TERMINALE S1 & S3**

SERIE N°5-1 : NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1:

Dans chaque cas calculer le module et un argument de z, en déduire la forme algébrique de z.

1) $z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, 2) $z=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^3$, 3) $z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$ 4) $z=\frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}$, 5) $z=\frac{1-cos\alpha+isin\alpha}{1+cos\alpha-isin\alpha}$, 6) $z=\left(\frac{3-2i}{2+3i}\right)^{11}$

Exercice 2 :

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$. On considère le nombre complexe z tel que :
$z=-sin2\theta+2icos^2\theta$.

1) Déterminer le module et un argument de z lorsqu'il existe, en fonction de θ.
2) déterminer θ pour que z et 1-z aient même module.

Exercice 3 :

1) Soit $Z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2=1-i$
a) Déterminer le module et un argument de Z_1 et Z_2
b) Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{Z_1}{Z_2}$. En déduire les valeurs exactes $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.
2) Trouver le module et un argument de $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$
a) Pour quels entiers naturels n, z^n est-il réel ? Calculer le plus petit de ces z^n.
b) Pour quels entiers naturels n, z^n est-il imaginaire pur ?

Exercice 4 : A tout nombre complexe z différent de $2-i$, on associe le nombre complexe $Z=\frac{z+3-2i}{z-2+i}$

Déterminer les ensembles des points M d'affixe z tels que :

1) $|Z|=1$; $|Z|=3$
2) Z soit un nombre réel.
3) Z soit un imaginaire pur.

Exercice 5 : Déterminer et construire l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

1) $\frac{2z-1}{z^2}$ est un nombre réel. 2) $A=\frac{4-(z+\bar{z})i}{1-i+\frac{1}{2}(z+\bar{z})}$ est un nombre réel.
3) $\arg(3i-z)=0[2\pi]$; 4) $arg(\bar{z}-3+i)=\frac{\pi}{4}[\pi]$ 5) $(z\bar{z})^2-13z\bar{z}+36\leq 0$

Exercice 6 : Soient z et z' deux nombres complexes, u est un nombre complexe vérifiant $u^2=zz'$

1) Montrer que $|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|$
2) On suppose que z et z' sont non nuls et $argz'-argz=\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Montrer que $t=\frac{z+z'+i(z-z')}{u}$ est un nombre réel.
3) On suppose $z'\neq 1$. Montrer que $\frac{z-z'\bar{z}}{1-z'}$ est réel si et seulement si $|z'|=1$ ou z est réel.

Exercice 7 :

1) Linéariser les expressions : sin^5x ; sin^2xcos^2x ; cos^32x
2) Exprimer en fonction de $sinx$ le $sin5x$
3) Soit n un entier naturel non nul, on pose : $A=\sum_{k=0}^{n-1}coskx$ et $B=\sum_{k=0}^{n-1}sinkx$
a) Calculer et écrire sous forme exponentielle $A+iB$

b) En déduire les expressions plus simples de A et B.

Exercice 8:

1) Soit $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$
a) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de de l'équation $(E): P(z) = 0$ alors $\bar{z}$ est également solution.
b) Vérifier que $1 + i$ est solution de (E). En déduire que P(z) se factorise sous la forme du produit de deux polynômes à coefficients réel. Résoudre (E).
2) Calculer $(2 + 3i)^3$. En déduire les solutions de l'équation : $z^3 + 46 - 9i = 0$
3) Soit θ un nombre réel vérifiant $0 < \theta < \pi$. Résoudre l'équation :
$z^3 + 2z^2(1 - cos\theta) + z(1 - 4cos\theta) + 2 = 0$, sachant qu'elle admet une solution réel indépendante de θ.
4) Soient a et b deux nombre réels. On considère l'équation
$E_{(a,b)}: z^4 - 4(cosacosb)z^3 + 2(1 + cos2a + cos2b)z^2 - 4(cosacosb)z + 1 = 0$
a) Justifier que zéro n'est pas une solution de $E_{(a,b)}$. Démontrer qu'en posant $u = z + \frac{1}{z}$, on peut ramener la résolution de l'équation $E_{(a,b)}$ à celle de deux équations du second degré.
b) En déduire les solutions de $E_{(a,b)}$.

Exercice 9:

On pose $S(z) = 1 + z^2 + z^4 \ldots + z^{2n-2}, n \in \mathbb{N}^*$
1) Calculer $S(z)$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 1 = 0$
3) En déduire que les solutions de $S(z) = 0$ sont $z_k = e^{i\frac{k\pi}{n}}$, $k \in \{1; 2; \ldots : 2n - 1\}\backslash\{n\}$
4) Soit $k \in \{1; 2; \ldots : n - 1\}$ $et\ k' = 2n - k$. Quel est l'ensemble décrit par k' ? Comparer z_k et $z_{k'}$. En déduire que le polynôme $P(z) = (z - z_k)(z - z_{k'})$ est à coefficients réels. Exprimer $P(z)$ en fonction de z, k et n.
5) Montrer que $S(z) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2 - 2zcos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$
6) En considérant $S(i)$; calculer le produit $\prod_{k=1}^{n-1} cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
7) considérant $S(1)$; montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Exercice 10 :

1-a) Soit α un nombre réel, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $S_{(\alpha,1)}: z^2 - 2zcos\alpha + 1 = 0$.
b) en déduire la forme trigonométrique des solutions dans $\mathbb{C}$ l'équation
$S_{(\alpha,n)}: z^{2n} - 2z^n cos\alpha + 1 = 0$. Où n est un entier naturel non nul donné.
2) Pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel α et pour tout complexe z, on pose :
$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n cos\alpha + 1$ et on admet que $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z^2 - 2zcos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$
a) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que : $\prod_{k=0}^{n-1} sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$
b) Pour tout α élément de l'intervalle $]0; \pi[$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 2, on pose : $H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$. Montrer que, $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$
c) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?
d) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 2 : $\prod_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 11 :

On considère trois nombres complexes non nuls deux à deux distincts a, b et c tels que $|a| = |b| = |c|$. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives a, b, c et H d'affixe $h = a + b + c$
Le but de l'exercice est de montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
1) Soit $\omega = \bar{b}c - b\bar{c}$. Montrer que ω est imaginaire pur
2) Utiliser la question précédente pour montrer que $(b + c)(\bar{b} + \bar{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont imaginaires purs.

3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.
4) Conclure sur la nature de H dans le triangle ABC.

Exercice 12 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$. Soit a et b deux nombres complexes non nuls, A et B leurs images respectives.

1-a) Démontrer que les points O, A, B sont alignés si et seulement si : $a\bar{b} \in \mathbb{R}$

b) Montrer que pour que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ soit réel, il est nécessaire et suffisante que O, A et B soient alignés ou que $OA = OB$

2) On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignés et que $|a| = |b| = 1$. Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

3) Application :'

Soient M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives $z_1$et z_2, tels que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

a) Calculer en fonction de $z_1$et z_2 l'affixe Z du point G barycentre de $(M_1, |z_1|)$ et $(M_2, |z_2|)$
b) Démontrer que $\frac{Z^2}{z_1 z_2}$ est un réel.
c) En déduire que $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$.

Problème 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct$(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$.

Partie A : racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

1) Démontrer le théorème suivant :

Il existe n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité $z_0,\ z_1, \dots, z_{n-1}$ telles que : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

2) Déterminer en utilisant le théorème précédent, les trois racines cubiques de l'unité sous forme exponentielle et algébrique. Retrouver ces résultats en factorisant $z^3 - 1$. Placer les points images des racines cubiques de l'unité dans le plan.

On pose $z_1 = j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Vérifier que $z_2 = j^2 = \bar{j}$ et que $1 + j + j^2 = 0$

3) La dernière propriété ci-dessus $(1 + j + j^2 = 0)$ s'énonce ainsi : la somme des racines cubiques de l'unité est nulle. Démontrer la propriété suivante :

Propriété : La somme des n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est nulle, $n \geq 2$

4) ***Application 1 :*** Calcul de $cos\frac{2\pi}{5}$

On considère le complexe $z_1 = cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5}$

a) Que vaut z_1^5 ? Que peut-on dire de z_1 ?
b) On pose $u = z_1 + z_1^4$ et $v = z_1^2 + z_1^3$. Calculer $u + v$ et uv. En déduire u et v
c) Indiquer $cos\frac{2\pi}{5}$

5) ***Application 2 :*** calcul de $tan\frac{\pi}{5}$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^5 - 1 = 0$
b) Soit θ un élément de $]-\pi;\ \pi[$.
   - Exprimer en fonction de θ, la solution de l'équation : $\frac{1-iz}{1+iz} = e^{i\theta}$
   - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^5 = 1$
   - Développer et ordonner l'expression : $(1 - iz)^5 - (1 + iz)^5$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 - iz)^5 - (1 + iz)^5 = 0$
   - En déduire la valeur de $tan\frac{\pi}{5}$.
c) Retrouver le résultat en utilisant le résultat de *l'application 1* :

6) On considère les points $M_0,\ M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ d'affixes respectives $z_0,\ z_1,\ z_2 \dots, z_{n-1}$. $n \geq 3$

a) Démontrer la propriété suivante :

Propriété : Les images des racines $n^{ième}$ de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier de coté $2sin\frac{\pi}{n}$ inscrit sur le cercle trigonométrique.

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k};\ \overrightarrow{OM_{k+1}}),\ k \in \{0,\ 1,\ 2, \dots, n-2\}$

7) ***Application 3:*** Construction d'un pentagone régulier

Soient $A_0, A_1,\ A_2,\ A_3, A_4$ les images des racines $5^{ième}$ de l'unité.

a) Quelle est la nature de $A_0A_1A_2A_3\ A_4$?

b) Soit H le point d'intersection de (A_1A_4) avec l'axe $(O;\ \vec{u})$. Montrer que $\overline{OH} = cos\frac{2\pi}{5}$

c) Soit (C) le cercle de centre Ω d'affixe $\left(-\frac{1}{2}\right)$ passant par B d'affixe (i). Ce cercle coupe $(O;\ \vec{u})$ en M et N. (On appelle M le point d'abscisse positif).
Montrer que $\overline{OM} = z_1 + z_1^4,\ \overline{ON} = z_1^2 + z_1^3$ et que H est le milieu de $[OM]$

d) En déduire une construction du pentagone régulier à la règle et au compas.

***Partie B :** Racine $n^{ième}$ d'un complexe non nul, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$*

1) Démontrer le théorème suivant :

Théorème : Un nombre complexe non nul $a = \rho e^{i\theta}$ admet n racines $n^{ième}$, $z_0,\ z_1,\ z_2 \dots, z_{n-1}$.
Telles que : $z_k = \sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

2) Démontrer la propriété suivante :

Propriété 1 : La somme des n racines $n^{ième}$ d'un complexe est nulle, $n \geq 2$.
Propriété 2 : Les images des racines $n^{ième}$ d'un complexe non nul, ≥ 3 , sont les sommets d'un polygone régulier de coté $\sqrt[n]{\rho}sin\frac{\pi}{n}$.

3) Préciser le centre et le rayon du cercle circonscrit au polygone $M_0M_1M_2 \dots\ M_{n-1}$

4) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k};\ \overrightarrow{OM_{k+1}}),\ k \in \{0,\ 1,\ 2, \dots, n-2\}$

5) Soit $a = 32(i - \sqrt{3})$. Déterminer les racines $6^{ième}$ de a et placer les images dans le plan.

***Problème 2 :** Quadrangle harmonique*

Dans le plan complexe, soient A, B et M images respectives de nombres complexes a, b et z. Soit z' le complexe d'image M', défini par (1) : $\frac{z'-a}{z'-b} \div \frac{z-a}{z-b} = -1$: ***Le quadrangle (A, B, M, M') est dit quadrangle harmonique.***

1) Démontre que : $\frac{M'A}{M'B} = \frac{MA}{MB}$ et $\left(\overrightarrow{M'A};\ \overrightarrow{M'B}\right) = (\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) + \pi[2\pi]$

2) Démontrer que la relation (1) équivaut à : $2(ab + zz') = (a + b)(z + z')$

3) Soit H le milieu de $[AB]$.

a) Démontrer que (AB) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{HM};\ \overrightarrow{HM'}\right)$

b) Démontrer que $HM \times HM' = HA^2 = HB^2$

4) Soit K le milieu de $[MM']$

a) Démontrer que la droite (MM') est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{KA};\ \overrightarrow{KB})$

b) Démontrer que $KA \times KB = KM^2 = KM'^2$

5) On suppose que A, B fixés et M, M' variables, de façon que leurs affixes vérifient (1).

a) Déduire de ce qui précède la construction du point M et de M' quand K est fixé.

b) prouver l'égalité : $KA + KB = HM + HM'$

6) ***Exemple :***

Soit les points E, I et F d'affixes respectives 1, 2 et 3. Soit $\mathcal{P}'$ le plan $\mathcal{P}$ privé de I et f l'application qui à tout point M de $\mathcal{P}'$ d'affixe z, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z' = \frac{1}{z-2} + 2$

a) Déterminer l'ensemble des points M invariants par f.

b) Déterminer une relation entre IM' *et* IM puis une relation entre $\left(\vec{u};\ \overrightarrow{IM'}\right)$ et $(\vec{u};\ \overrightarrow{IM})$. En déduire une construction du point M'_0 image de M_0 d'affixe $z_0 = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ par f.

c) On suppose que M est un point de $\mathcal{P}'$ différent de E et de F. Montrer que le quadrangle (E, F, M, M') est harmonique. Montrer que si M appartient à la médiatrice de $[AB]$, il en est de même pour M'.

7) **Application :** ***construction géométrique des solutions d'équation du 2nd degré dans*** $\mathbb{C}$.

Soit l'équation $(E): z^2 - 2pz + \alpha^2 = 0$ Où p et α sont des complexes fixés. Soient C, C' M' et M'' les images respectives des complexes : α, $(-\alpha)$, z' et z'' (où z' et z'' sont les solutions de (E)).

a) Démontrer que le quadrangle (C, C', M', M'') est harmonique.

b) En remarquant que le point A d'affixe p est le milieu de $[M'M'']$, construire les points M' et M''.

Problème 3 : Ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \alpha[\pi]$, $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \alpha[2\pi]$

Soient A et B deux points distincts du plan. On choisit convenablement le repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ de façon que les affixes des points B et A soient respectivement le nombre réel $a > O$ et son opposé $-a$. On considère le point M d'affixe $z = x + iy$ distinct de A et de B.

Partie A : Détermination de l'ensemble E des points M tels que $(\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}; \overrightarrow{\boldsymbol{MB}}) = \boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{\pi}]$

1) Prouver que $\left|\frac{z-a}{z+a}\right| = \frac{|z-a||\bar{z}+a|}{(z+a)(\bar{z}+a)}$ et que si θ est un argument de $\frac{z-a}{z+a}$ alors on a :

$cos\theta = \frac{z\bar{z}-a^2}{|z-a||\bar{z}+a|}$ et $sin\theta = \frac{1}{i} \times \frac{a(z-\bar{z})}{|z-a||\bar{z}+a|}$

2) Prouver que $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \alpha[\pi]$ équivaut à $sin(\theta - \alpha) = 0$ ce qui équivaut encore à $2aycos\alpha = (x^2 + y^2 - a^2)sin\alpha$

3) Démontrer que si $\alpha = 0[\pi]$ alors E est l'axe des abscisses (xx') privé des points A et B

4) Démontrer que si $\alpha \neq 0[\pi]$ alors E est un cercle (C) privé des points A et B dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
   - Quel est le cercle (C) si $\alpha = \frac{\pi}{2}[\pi]$?
   - Où se trouve le centre Ω si $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$? si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$?
   - Prouver que ces dans ces deux cas l'angle géométrique aigu $\widehat{A\Omega O}$ a pour cosinus $|cos\alpha|$

Partie B : Détermination de l'ensemble E' des points M tels que $(\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}; \overrightarrow{\boldsymbol{MB}}) = \boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{2\pi}]$

1) En utilisant $sin\theta = \frac{1}{i} \times \frac{a(z-\bar{z})}{|z-a||\bar{z}+a|}$, prouver que : $M \in E' \Leftrightarrow M \in E$ et $ysin\alpha \geq O$

2) Déduire de 1) que si :
   - $\alpha = 0[2\pi]$, alors $E' = (AB)\backslash[AB]$
   - $\alpha = \pi[2\pi]$, alors $E' =]AB[$
   - $\alpha \neq 0[2\pi]$ et $\alpha \neq \pi[2\pi]$, alors E' est un arc de cercle d'extrémités A et B privé des point A et B.

3) Tracer E pour $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \pi; -\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{6}\right\}$