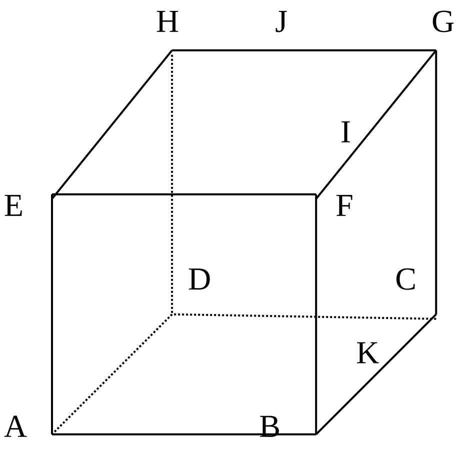
**Exercice 1 (6 pts)**

ABCDEFGH est un cube d'arête a :




1° I est le milieu se [FG], K celui de [CB] et J celui de [HG]. Calculer les produits salaires $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de a. **(1,5 pt)**

2° En déduire que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (IJK) et la distance de A au plan (IJK). **(1 pt)**

3° Soit G le barycentre de (A, 2), (B, 1), (C, 1) et (F, 1).

a) Soit O le centre de gravité du triangle BCF, montrer que A, G et O sont alignés. **(0,5 pt)**

b) Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace vérifiant $2MA^2 + MB^2 + MC^2 + MF^2 = 5a^2$. Vérifier que A appartient à (S). **(1 pt)**

c) Déterminer l'ensemble (P) des points du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MF^2 = -a^2$. Vérifier que A, B et C appartiennent à (P). **(1 pt)**

d) Calculer la distance de G à (P) et en déduire la nature de l'intersection de (S) et (P). **(1 pt)**

**Exercice 2 (5 pts)**

On considère la suite numérique $(U)_{n\in IN}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \alpha n + \beta \end{cases}$ pour tout $n\in IN$

Soit $(V_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $\forall n\in IN \;\; V_n = 4U_n - 6n + 15$

1) Déterminer les réels $\alpha$ et $\beta$ pour la que la suite $V_n$ soit une suite géométrique **(1 pt)**

2) On supposera pour la suite que $\alpha = 1$ et $\beta = -1$

a) Si $(V_n)$ est une suite géométrique préciser alors la raison et le premier terme **(1 pt)**

b) Exprimer $V_n$ en fonction de n. En déduire que $\forall n\in IN$ ; $U_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{6n-15}{4}$ **(1 pt)**

3) Montrer que la suite $U_n$ peut s'écrire sous la forme $U_n = t_n + w_n$ où $(t_n)$ est une suite géométrique et $w_n$ une suite arithmétique **(0,5 pt)**

4) Calculer

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k \qquad R_n = \sum_{k=0}^{n} w_k \quad \text{en déduire la somme } S_n = \sum_{n=0}^{n} u_k \ \textbf{(1 pt)}$$

5) Etudier la convergence de chacune des suites ci-dessus **(0,5 pt)**

**Problème (9 pts)**

Soit f la fonction définie par $f(x) = (2-x)\sqrt{|4-x^2|}$

## Partie A

1° a) Déterminez le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de $D_f$. **(1 pt)**

b) Exprimer f(x) sans le symbole valeur absolue **(0,5 pt)**

c) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -2$ et en $x_0 = 2$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus **(1 pt)**

2° a) Montrer que **(1 pt)**

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-2;2\right[ & f'(x) = \dfrac{2(x^2-x-2)}{\sqrt{4-x^2}} \\ \forall x \in \left]-\infty;-2\right[ \cup \left]2;+\infty\right[ & f'(x) = \dfrac{-2(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-4}} \end{cases}$$

b) Etudier le signe de $x^2 - x - 2$ en déduire de f '(x) sur chacun des intervalles $\left]-2;2\right[$ , $\left]-\infty;-2\right[$ et $\left]2;+\infty\right[$ **(0,5 pt)**

c) Donner le tableau de variation de f **(1 pt)**

## Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]2;+\infty\right[$.

1° Montrer que g est bijective de $\left]2;+\infty\right[$ vers un intervalle J à préciser. **(1 pt)**

2° Calculer f(4) et étudier la dérivabilité de $g^{-1}$ en $-4\sqrt{3}$. **(1 pt)**

3° Si $g^{-1}$ est dérivable en $-4\sqrt{3}$, donner la valeur de $g^{-1}{}'\left(-4\sqrt{3}\right)$. **(1 pt)**

4° Construire $(C_f)$ et $\left(C_{g^{-1}}\right)$ dans un même repère. **(1 pt)**