

Exercice 1 : 5 points

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

- 1) Vérifier que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_1 .
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $f(z) = 0$. On notera z_2 la racine dont la partie imaginaire est positive et z_3 l'autre racine.
- 3) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions.
- 4) On désigne par O, A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 et z_3 .
Montrer que A, B et C sont dans le même cercle de centre O .
- 5) Calculer $z_1 - z_2$ et $z_0 - z_3$. Déterminer la nature du quadrilatère $OABC$.
- 6) On considère les points $P(i), Q(-i)$ et $M(z)$. On pose $Z = \frac{z-i}{z+i}$.
 - a) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points $M(z)$ tel que Z soit un réel.
 - b) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points $M(z)$ tel que Z soit un imaginaire pur.
 - c) Montrer que $|Z| = 1$ si et seulement si z est un réel.

Exercice 2 : 5 points

On définit une suite (U_n) par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1 \end{cases}$$

- 1) Calculer U_1, U_2 et U_3 . La suite (U_n) est-elle géométrique, arithmétique ?
- 2) On définit la suite (V_n) par : $V_n = U_n - 2n + 6$.
 - a) Calculer V_0 et V_1 .
 - b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - c) En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n .
- 3) Quelle est la limite de (V_n) ? Celle de (U_n) ?
- 4) Soit la suite (T_n) définie par : $T_n = 5^{V_n}$.
- 5) Exprimer $P_n = \prod_{k=0}^n T_k = T_0 * T_1 * \dots * T_n$ en fonction de n . Déterminer sa limite.
- 6) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

Problème : 10 points

f est la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Dresser son tableau de variation.
- 3) Vérifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$ et que $2,19 < \alpha < 2,20$.
- 4) Etudier suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.

Partie B :

- 1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) a) Montrer pour tout x de D , $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
b) En déduire le tableau de variation de f .
c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3\alpha+4}{2}$.
- 3) a) Vérifier que pour tout x de D , $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$.
b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ).
c) Préciser les équations des autres asymptote.
d) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ).
- 4) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C).

Partie C :

Soit h la restriction de f à $I = [\alpha; +\infty[$.

- 1) Montrer que h est une bijection de $[\alpha; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
- 2) h^{-1} est-elle dérivable sur J ? Sinon, préciser son ensemble de dérivabilité.
- 3) Calculer $h(2)$. En déduire $(h^{-1})'(\frac{16}{3})$.
- 4) Tracer $(C_{h^{-1}})$ la courbe de h^{-1} dans le même repère.