UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

16 G 26 A 01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5 Coef 5

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (04 *points*).

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$, où z est un nombre complexe.

a. Déterminer la solution réelle de (E). $0,5$ *pt*

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E). $0,5$ *pt*

2. On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. Soit M le point d'affixe z distinct de A et de B.

a. Calculer $\dfrac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC. $0,5 + 0,5$ *pt*

b. On pose $Z = \dfrac{z-3}{z-5+2i}$.

Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z. $0,5$ *pt*

En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel non nul. $0,5$ *pt*

3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et I le point d'affixe $2 - i$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre I et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$. $0,5$ *pt*

b. Déterminer l'image (C') de (C) par r. Construire (C'). $0,5$ *pt*

Exercice 2 (06 *points*).

A l'occasion de ses activités culturelles, le FOSCO d'un lycée organise un jeu pour le collectif des professeurs. Une urne contenant 4 boules rouges et une boule jaune indiscernables au toucher est placée dans la cour de l'école. Chaque professeur tire simultanément 2 boules de l'urne.

- Si les deux boules sont de même couleur, il les remet dans l'urne et procède à un second tirage successif avec remise de 2 autres boules.
- Si les deux boules sont de couleurs distinctes, il les remet toujours dans l'urne, mais dans ce cas le second tirage de 2 autres boules s'effectue successivement sans remise.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « Le professeur tire 2 boules de même couleur au premier tirage. » $0,25$ *pt*

B : « Le professeur tire deux boules de couleurs différentes au premier tirage. » $0,25$ *pt*

C : « Le professeur tire deux boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de même couleur. » $0,5$ *pt*

D : « Le professeur tire deux boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. » $0,5$ *pt*

E : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. » $0,5$ *pt*

F : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au premier et au second tirage. » $0,5$ *pt*

2. Pour le second tirage, chaque boule rouge tirée fait gagner au FOSCO 1000 F et chaque boule jaune tirée fait gagner au collectif des professeurs 1000 F.
Soit X la variable aléatoire à laquelle on associe le gain obtenu par le FOSCO.
a. Déterminer les différentes valeurs prises par X et sa loi de probabilité. 1 *pt*
b. Déterminer la fonction de répartition de X. 1 *pt*

3. Etant donné que le collectif est composé de 50 professeurs qui ont tous joué indépendamment et dans les mêmes conditions, déterminer la probabilité des évènements suivants :
G : « le FOSCO réalise un gain de 100 000 F. » $0,5$ *pt*
H : « le collectif des professeurs réalise un gain de 100 000 F. » $0,5$ *pt*
I : « Ni gagnant, ni perdant. » $0,5$ *pt*

PROBLEME (10 *points*).

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -2\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$.

1. a. Déterminer Dg, puis calculer les limites de g aux bornes de Dg. $0,75$ *pt*
b. Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g. 1 *pt*

2. a. Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une que l'on désigne $\alpha \in]-0,72, -0,71[$. $0,25 + 0,5$ *pt*
b. Déterminer le signe de $g(x)$. $0,5$ *pt*

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{ln(x+1)} & \text{si} \quad x > -1 \\ f(x) = (1+x)e^{-x-1} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a. Montrer que $Df = \mathbb{R}$ et calculer les limites aux bornes de Df. $0,75$ *pt*
b. Etudier la nature des branches infinies. $0,5$ *pt*

2. a. Etudier la continuité de f en -1 et en 0. $0,5$ *pt*
b. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0 et interpréter graphiquement les résultats. 1 *pt*

3. a. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ et $x \neq 0$ on a $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{\ln^2(x+1)}$ et calculer $f'(x)$ sur $]-\infty, -1[$. $0,5$ *pt*
b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. 1 *pt*

4. Soit h la restriction de f à $[0, +\infty[$.
a. Montrer que h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. $0,25$ *pt*
b. Donner le sens de variation de h^{-1}. $0,25$ *pt*
c. Construire Cf et Ch^{-1}. $1,25$ *pt*

Partie C

Soit m la fonction définie par $m(x) = \dfrac{ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. a. Déterminer les fonctions u et v telles que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $m(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. $0,25$ *pt*
b. En déduire la fonction H définie sur $]0, +\infty[$ telle que $H'(x) = m(x)$ puis calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{f(x)}dx$. $0,75$ *pt*