Durée : 06 heures
Toutes Séries Réunies

SESSION 2010

CLASSES DE TERMINALE

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

PROBLEME 1 (12 points)

Soit $\mathcal{A}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des vecteurs associé à $\mathcal{A}$.

Définitions

1) On dit que l'application Ψ: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un endomorphisme si :

  a) Pour tous $\vec{x}, \vec{y}$ appartenant à $\mathcal{E}$, $\Psi(\vec{x}+\vec{y}) = \Psi(\vec{x}) + \Psi(\vec{y})$
  b) Pour tout réel α et pour tout $\vec{x} \in \mathcal{E}$, $\Psi(\alpha\vec{x}) = \alpha\Psi(\vec{x})$

2) Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme

3) On appelle endomorphisme adjoint, l'unique endomorphisme Ψ^* tel que :

   $\vec{x}.\ \Psi(\vec{y}) = \Psi^*(\vec{x}).\ \vec{y}$ quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ appartenant à $\mathcal{E}$.

4) Un endomorphisme Ψ est dit symétrique si $\Psi^* = \Psi$.

5) On appelle coordonnées barycentriques d'un point M relativement à un triangle ABC, les trois réels λ, μ, ν tels que $\lambda + \mu + \nu = 1$ et que M soit le barycentre des points A, B, C affectés respectivement de λ, μ, ν.

   On rappelle qu'un point M est intérieur à un triangle si et seulement si ses coordonnées barycentriques sont strictement positives.

Préliminaires

1) Montrer qu'un endomorphisme Ψ de $\mathcal{E}$ est symétrique s'il existe une base $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{E}$ telle que $\vec{u}.\ \Psi(\vec{v}) = \Psi(\vec{u}) . \vec{v}$.

2) Montrer que Ψ^{-1}bijection réciproque d'un automorphisme Ψ symétrique de $\mathcal{E}$ est symétrique.

3) Soit ABC un triangle et M un point du plan. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB} + \nu\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

PARTIE 1

Points isogonaux relativement à un triangle.

Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{A}$. On note a, b, c les affixes des points A, B et C et f(z) le polynôme complexe définie par $f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r$ ayant pour racines a, b et c.

Deux points distincts M et N sont dits isogonaux (respectivement strictement isogonaux) relativement à ce triangle, s'ils sont distincts de A, B et C et on a :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}\right)$ (modulo π) (resp. Modulo 2π)

$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}\right) = \left(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}\right)$ (modulo π) (resp.modulo 2π)

$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}\right)$ (modulo π) (resp. Modulo 2π)

1) Soient M et N deux points distincts ou confondus d'affixes respectives m et n, et soit le polynôme complexe Q (z) = (z – m) (z – n). Montrer que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC si et seulement si, il existe des nombres réels non nuls α, β et γ tels que : Q(a) = α f'(a), Q(b) = β f'(b) et Q(c) = γ f'(c), et que ces points sont strictement isogonaux si et seulement si α, β et γ sont strictement positifs. (On pourra utiliser le résultat suivant : pour tout polynôme f(z) = $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, on a f'(z) $\sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, z^{k-1}$)

2) On suppose que les points M et N d'affixes m et n sont isogonaux relativement au triangle ABC.

a) On considère R(z) = $\frac{Q(z)}{f(z)}$. Montrer qu'il existe trois nombres a', b' c' tels que

R(z) = $\frac{a'}{z-a} + \frac{b'}{z-b} + \frac{c'}{z-c}$.

En déduire que les nombres α, β, γ définis précédemment vérifient : $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

b) Etablir que $\frac{\alpha}{m-a} + \frac{\beta}{m-b} + \frac{\gamma}{m-c} = 0$ et $\frac{\alpha}{n-a} + \frac{\beta}{n-b} + \frac{\gamma}{n-c} = 0$

c) Exprimer les coordonnées barycentriques des points M et N relativement au triangle ABC. En déduire que ces points appartiennent au complémentaire dans $\mathcal{A}$ de la réunion des droites (AB), (AC) et (BC) et qu'ils sont strictement isogonaux si et seulement si ils appartiennent à l'intérieur du triangle ABC.

3) Soient α, β, γ trois réels non nuls de somme égale à 1. On pose :

Q(z) = α(z-b) (z-c) + β(z-a) (z-c) + γ(z-a) (z-b)

Soient m et n les racines de ce polynôme avec éventuellement m = n. Montrer que les points M et N d'affixes respectives m et n sont isogonaux relativement au triangle ABC.

PARTIE 2 ***Triangles orthologiques***

Etant donnés deux triangles ABC et A'B'C' du plan $\mathcal{A}$ on note :

- δ_A, δ_B et δ_C les droites passant respectivement par A , B et C et perpendiculaires respectivement aux droites (B' C') ; (C' A') et (A' B')
- $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ les droites passant respectivement par A', B', C' et perpendiculaires respectivement aux droites (BC), (CA), (AB)
- f l'application du plan $\mathcal{A}$ dans lui-même telle que f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'. Soit Ψ l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ associé à f c'est-à-dire tel que : si f(M) = M' et f(N) = N' alors $\Psi((\overrightarrow{\mathrm{MN}}) = \overrightarrow{\mathrm{M'N'}}$, pour tous M, M', N et N' appartenant à $\mathcal{A}$

  On dit que le triangle A' B' C' est orthologique au triangle ABC si les droites δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes.

1) Soient ABC et A'B'C' deux triangles du plan $\mathcal{A}$.

   a) Montrer que l'application Φ, qui a tout point M de $\mathcal{A}$ associe Φ(M) = $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{B'C'}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{C'A'}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ est constante sur $\mathcal{A}$.

   b) Montrer que la constante est égale à $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$. (($\Psi$ - Ψ*) ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}$))

   c) On suppose que le triangle A' B' C' est orthologique au triangle ABC et on note O le point de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C. Montrer que Φ(O) = 0. En déduire que Ψ est symétrique.

   d) Réciproquement montrer que si Ψ est symétrique alors le triangle A'B'C' est orthologique à ABC.

2) Montrer que si ABC est orthologique à A'B'C' alors A'B'C' est orthologique à ABC. Quelle relation y-a-t-il entre le point O de concours des droites δ_A, δ_B, δ_C et le point de concours O' des droites δ_A', $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$?

   La relation « ABC est orthologique à A'B'C' » est symétrique. On dira simplement que les triangles ABC et A'B'C' sont orthologiques.

3) Soit ABC un triangle et soit A', B', C' les milieux respectifs des segments [AB], {CA], [AB]. Montrer que les triangles ABC et A'B'C' sont orthologiques. Préciser les points de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C et des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$. Identifier l'application affine f transformant A, B et C en les points A', B' et C'.

PROBLEME 2 **(08 points)**

I. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^+ \mathrm{X}\ \mathbb{R}^+,\ f(x + y) = f(x).f(y)$ (1)

1) Vérifier que f est à valeurs positives ou nulles.
2) Montrer que si f(0) = 0, alors la fonction f est identiquement nulle.
   Dans la suite on suppose que f est non identiquement nulle.
3) Déterminer la valeur de f(0).
4) Soient x un réel positif ou nul et n un entier naturel non nul. Exprimer $f(nx)$ et $f(\frac{1}{n}x)$ en fonction de $f(x)$ et de n.
5) Soit x un réel positif ou nul, $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel où p et q sont deux entiers strictement positifs. En calculant $f(q(r\,x))$ de deux manières, exprimer $f(r\,x)$ en fonction de f(x) et de r.
6) Pour cette question, on suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que $f(\alpha) = 0$
   a) Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergente vers 0 tels que $f(x_n) = 0$ pour tout entier naturel n.
   b) Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Dans ce qui suit, on suppose que f est à valeurs réelles strictement positives
7) On suppose que la fonction f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^{+}$. Montrer qu'il existe a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout réel x positif non nul.
8) On suppose que f est continue à droite en 0.
   Montrer qu'elle est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^{+}$ et conclure.
9) On suppose qu'il existe deux réels A et B vérifiant $0 \leq A < B$ tels que f soit majorée sur l'intervalle [A,B].
   Soit M un majorant de f sur [A,B]
   a) Montrer que pour tout $x \in [0, B-A]$, on a :
   $0 < \frac{f(B)}{M} \leq f(x) \leq \frac{M}{f(A)}$
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \frac{B-A}{n}]$
   Montrer que :
   $\left(\frac{f(B)}{M}\right)^{\frac{1}{n}} \leq f(x) \leq \left(\frac{M}{f(A)}\right)^{\frac{1}{n}}$.
   En déduire que f est continue à droite en 0.

II. Pour tout λ strictement positif, on désigne par f_λ la fonction définie par :
$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

On rappelle que si X est une variable aléatoire réelle, alors sa fonction de répartition est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x)$$

- F_X caractérise la loi de la variable aléatoire réelle X.
- Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle s'il existe un réel λ strictement positif tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x f_\lambda(t)\,dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On dit alors que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Soi X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
   a) Expliciter sa fonction de répartition.
   b) Montrer que $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $P(X > s + t / X > t) = P(X > s)$ ②
   où la notation P(A/B) représente la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B, de probabilité non nulle, est réalisé
   La propriété ② se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.

2) Soit T une variable aléatoire réelle sans mémoire. On note F_T sa fonction de répartition.
   a) Montrer que la fonction G_T définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
   $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $G_T(x) = 1 - F_T(x)$ vérifié l'équation fonctionnelle. ①
   b) Montrer que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

B A R E M E

Problème 1 **(12 pts)**

Préliminaires
1) 0,5pt
2) 0,5pt
3) 0,5pt

Partie 1
1) 1,5pt
2) a) 1pt
   b) 1pt
   c) 1pt
3) 1pt

Partie 2
1) a) 0,5pt
   b) 0,5pt
   c) 01pt
   d) 0,5pt
2) 01pt
3) 1,5pt

Problème 2 **(08 points)**

partie1
1) 0,5pt
2) 0,5pt
3) 0,5pt

4) 0,5pt
5) 0,5
6 a) 0,5pt
   b) 0,5pt
7) 0,5pt
8) 0,5pt
9 a) 0,5pt
   b) 01pt

partie 2
1) a) 0,5pt
   b) 0,5pt
2) a) 0,5pt
   b) 0,5pt