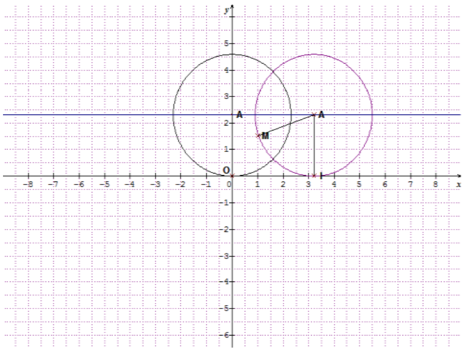
SERIE N°4-1 : COURBES PARAMETREES



Exercice 1 : ***La cycloïde***

Un cercle de centre $\boldsymbol{A}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$ roule sans glisser sur une droite $(\boldsymbol{D})$. La courbe $(\boldsymbol{C})$ décrite par un point $\boldsymbol{M}$de ce cercle est appelée cycloide. On suppose qu'au départ $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{O}$, O étant l'origine d'un repère orthonormé.

1) La condition de roulement sans glissement s'exprime par : $\boldsymbol{OI} = \widehat{\boldsymbol{IM}}$. Soit t une mesure de l'angle orianté $(\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}; \overrightarrow{\boldsymbol{AI}})$, $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ le vecteur unitaire de $(\boldsymbol{D})$ et $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ le vecteur directement orthogonal àà $\vec{\boldsymbol{\imath}}$. Démontrer que la courbe $(\boldsymbol{C})$ est définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = R(t - sint)} \\ \boldsymbol{y = R(1 - cost)} \end{cases}$$

2) Comparer les coordonnées des points $M(t)$et $M'(t + 2\pi)$. Montrer que ces points se correspondent dans une translation.
3) En déduire l'intervalle d'étude utile.
4) Etudier les variations de $x$et y.
5) Tracer la courbe (C) pour $R = 1$

Exercice 2:

Dans le plan orienté rapporté au repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) (unité : 1 cm), on trace le cercle *(C)* de diamètre $[AO]$ où A est le point de coordonnées (-6, 0). On appelle Ω le centre de *(C)*. Si P est un point de *(C)*, on note K le projeté orthogonal de P sur la droite (AO) et M le point défini par $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AP}$

Soit *t* une mesure on radians de l'angle $(\overrightarrow{\Omega O}; \ \overrightarrow{\Omega P})$

On veut étudier l'ensemble *(E)* des points M de paramètre *t* obtenu lorsque P décrit *(C).*

1) Sur une figure qui sera complétée à la question **5**. Représenter le cercle *(C)*, placer un point P et les points K et M correspondants.

2. a) Exprimer on fonction de *t* les coordonnées du point P puis celles du point M.

b) En déduire une représentation paramétrique de *(E)*.

3. a) Soit M' le point de *(E)* de paramètre $\pi - t$. Par quelle transformation peut- on obtenir le point M' à partir du point M de paramètre *t* ?

b) Soit M'' le point de *(E)* de paramètre $-t$. Par quelle transformation peut-on obtenir le point M" à partir du point M de paramètre *t* ?

4) Soit N le point de *(E)* de paramètre $t + \dfrac{\pi}{2}$ Montrer que le vecteur $\overrightarrow{ON}$ est un vecteur directeur de la tangente à (E) au point M de paramètre *t*.

5) Tracer *(E)* en utilisant les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Exercice 3 : ***L'astroïde***

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit (Γ) le cercle de centre O et rayon 8. Soit P le point du cercle tel que l'angle $(\vec{\imath}; \overrightarrow{OP})$ ait pour mesure t, $t \in [-\pi; \pi]$. On désigne par A, B et M les projetés orthogonaux de P sur l'axe des abscisses , l'axe des ordonnées et la droite (AB).

1) Démontrer qu'une équation de la droite (AB) est : $xsint + ycost - 8sintcost = 0$.
2) Démontrer que les coordonnées x et y de M s'exprime en fonction de t par :

$$\begin{cases} x = 8cos^3t \\ y = 8sin^3t \end{cases}$$

3) On se propose de tracer (C), lieu géométrique des points M ,lorsque$P$ décrit le cercle (Γ), c'est-à-dire lorsque t décrit l'intervalle $[-\pi;\ \pi]$.

a) Comparer les points $M(t)$et $M(-t)$, $M(t)$ et $M(\pi - t)$, $M(t)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. Dans chaque cas, quelle conclusion peut-on en tirer pour la courbe (C)?

b) En utilisant les trois résultats précédents, justifier le choix de l'intervalle $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ comme intervalle d'étude.

4-a) Etudier les variations de $x$et y.

b)Montrer que le vecteur dérivé en $M(t)$ est colinéaire à $\vec{u}(t) = (-cost)\vec{\imath} + (sint)\vec{\jmath}$.

c)En déduire que (C) admet au point $E(0\ ;\ 8)$ une tangente verticale et au point $F(8; 0)$ une tangente horizontale.

d) Tracer la courbe (C).

5)Soit$M(t)$ un point de (C) tel que la tangente en $M(t)$ ne soit pas parallèle aux axes des coordonnées.

a) Ecrire une équation de la tangente en $M(t)$.

b) Cette tangente coupe l'axe des abscisses en R et l'axe des ordonnées en Q. Démontrer que $[RQ]$ a une longueur constante.

<u>Exercice 4 :</u> ***une cardioïde***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé directe $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on considère le cercle (C) de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$. A tout point m de (C), on a associe le point M projeté orthogonal de A sur la tangente en m à (C). On appelle t une mesure de l'angle $(\vec{\imath};\ \overrightarrow{Om})$.

1) Démontrer que le point M a pour coordonnées : $(cost - sin^2t;\ sintcost + sint)$. Lorsque m décrit (C), t varie dans $\mathbb{R}$: l'ensemble des points M est une courbe (C') appelé cardioïde.
2) Etudier les positions relatives de (t), $M(t + 2\pi)$, $M(-t)$. En déduire qu'il suffit, pour tracer la courbe (C'), de limiter les variations de tà $[0;\ \pi]$.
3) Tracer (C') en précisant les tangentes aux points de paramètres 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$. On admet qu'au point de paramètre π, (C') a une tangente horizontale.

<u>Exercice 5 :</u> ***une rosace à quatre feuille***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé directe $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soit A un point sur l'axe des abscisses et B un point sur l'axe des ordonnées tel que $AB = 1$. On note M le projeté orthogonal de O sur $[AB]$.

On se propose de déterminer le lieu géométrique (C) de M lorsque A et B se déplacent chacun sur son axe.

1) On note x et y les coordonnées de M et t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\ -\vec{\imath})$. Montrer que (C) est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées : $\begin{cases} x = sin^2tcost \\ y = cos^2tsint \end{cases}$, $\quad t \in \mathbb{R}$
2) Pour tout réel t, comparer la position des points : $M(t + 2\pi)$et $M(t)$, $M(-t)$ et $M(t)$, $M(\pi - t)$ et $M(t)$ et en fin $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et $M(t)$.
3) En déduire qu'il suffit de faire l'étude pour $t \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$. Indiquer les transformations qui permettent de compléter la courbe (C).
4) Etudier les variations de x et $y$sur $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.
5) Tracer la courbe (C) en précisant les points tangente est parallèle à l'un des axes, ainsi que les tangentes à l'origine.

<u>Exercice 6 :</u>

1) Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases};\quad t \in \mathbb{R}$$

On comparera les points $M(-t)$et $M(t)$, $M\left(\frac{1}{t}\right)$ et $M(t)$, en déduire que l'étude peut se faire sur $[0; 1]$

2) Tracer les courbes paramétrées définie par :

   a) $\begin{cases} x = e^t cost \\ y = e^t sint \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

   b) $\begin{cases} x = e^t \\ y = 2(1+t)e^t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

   c) $\begin{cases} x = 3 - 2cos^2 t \\ y = sin3t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

Proposée Par Mr SARR