

**Exercice 1 :**

Calculer les limites suivantes :

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x^2}$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2-4}$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{(\sin x)^2}$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos 2x - 1}{\cos 3x}$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$
- 9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{3x+2}$
- 10)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+\cos x}$
- 11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$
- 12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{(\tan \frac{x}{2})^2}$
- 13)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin ax - \sin(x^2)}{x-a}$
- 14)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^n - xa^n}{x-a}$

**Exercice 2 :**

- 1) On donne  $f(x) = 2x - x \sin x$ 
  - a) Démontrer que pour tout  $x \geq 0$  on a  $x \leq f(x) \leq 3x$ .  
En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - b) Démontrer que pour tout  $x \leq 0$  on a  $3x \leq f(x) \leq x$ .  
En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

- 2) On donne  $g(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$   
Démontrer que pour tout  $x > 0$   $-\frac{x^2+1}{x^3} \leq g(x) \leq \frac{x^2+1}{x^3}$ .  
En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

**Exercice 3 :**Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ 

- 1) Déterminer  $Df$ .
- 2) Démontrer que  $\forall x \in Df, f(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ .
- 3) Étudier la parité de  $f$  puis justifier le choix de  $I = ]0,1[$  comme intervalle d'études de  $f$ .
- 4) Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $I$ .
- 5) Étudier les variations de  $f$  sur  $I$ .
- 6) Tracer  $C_f$  sur  $I$  puis sur  $Df$  dans un repère orthonormé (unité 5cm).

#### **Exercice 4 :**

On considère la fonction définie par  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x}$

- 1) Déterminer le domaine de définition  $Df$  de  $f$ .
- 2) Montrer que l'étude par  $f$  peut être réduite à l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$ .
- 3) Ecrire  $f$  sans la symbole valeur absolue sur  $I$ .
- 4) Etudier la dérivabilité de  $f$  sur  $I$ .
- 5) Calculer  $f'(x)$  dans les intervalles où  $f$  est dérivable puis étudier son signe (On montrera que pour tout  $x$  de  $]0,1[$   $x^2\sqrt{-x^2+1} - 2 < 0$ ).
- 6) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $I$  et préciser les équations asymptotes éventuelles à  $Cf$ .
- 7) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 8) Tracer  $Cf$  sur  $I$  puis sur son domaine de définition.

#### **Exercice 5 :**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$

On note  $Cf$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition  $Df$  de  $f$  puis calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $Df$ .
- 2) a) Montrer que  $(\Delta): y = 2x - \frac{1}{2}$  est une asymptote oblique à  $Cf$  en  $+\infty$ .  
b) Préciser la nature de l'asymptote en  $-\infty$ .  
c) Etudier la position de  $Cf$  par rapport à  $(\Delta)$ .
- 3) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $0^-$  et en  $1^+$ .  
Interpréter géométriquement les résultats.  
b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de  $f$  puis calculer  $f'(x)$ .  
c) Résoudre dans  $\mathcal{R}$   $2\sqrt{x^2 - x} + 2x - 1 < 0$  ; en déduire le signe de  $f'(x)$ .
- 4) Tracer  $Cf$  et  $(\Delta)$ .
- 5) Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = m$  où  $m$  est un paramètre réel.

#### **Exercice 6 :**

On considère la fonction définie par  $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$

- 1) Déterminer le domaine de définition  $Df$  de  $f$  puis calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $Df$ .
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$ . Interpréter graphiquement le résultat.
- 3) Etudier les variations de  $f$  et tracer  $Cf$  dans un repère orthonormé.
- 4) Montrer que  $f$  est une bijection de l'intervalle  $I = [-1, +\infty[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- 5) Soit  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$ .  
Expliciter  $f^{-1}$ . Tracer  $Cf^{-1}$  sans étudier  $f^{-1}$ .
- 6) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f^{-1}$ .
- 7) Calculer  $(f^{-1})'(x)$ .
  - a) En utilisant l'expression de  $f^{-1}(x)$ .
  - b) En utilisant le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque.

**Exercice 7 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x - \sin x$ .

- 1) Etudier la périodicité et la parité de la fonction  $f$ .
- 2) Justifier le choix de l'intervalle  $I = [0; \pi]$  comme intervalle d'étude.
- 3) Démontrer que, pour tout  $x$  réel :  $f'(x) = -4 \sin^2 x \cos x$ . En déduire les variations de  $f$ .
- 4) Tracer  $C_f$  dans un repère orthogonal.

**Exercice 8 :**

On considère la fonction  $f$  définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x)^2} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = -\frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On note  $C$  sa courbe dans un repère orthonormé.

**Partie A :**

- 1) Etudier le signe sur  $\mathbb{R}$  du produit  $(-3x^2 + 6x - 4)(x^2 - 2x)$ .
- 2) On pose  $\psi(x) = -x\sqrt{1+x^2} - 1$ .
  - a) Etudier les variations de la fonction  $\psi$ . En déduire que l'équation  $\psi(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ . Calculer la valeur de  $\alpha$  en résolvant le déterminant de cette équation.
  - b) Préciser le signe de  $\psi$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Partie B :**

- 1)
  - a) Préciser l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  et calculer les limites aux bornes de  $D$ . Interpréter graphiquement le résultat.
  - b) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $D$ .
- 2)
  - a) Calculer  $f'(x)$  sur le domaine de dérivabilité de  $f$ .
  - b) Déduire de A le signe de  $f'(x)$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $T$  à  $C$  au point d'abscisse 1. Etudier la position de  $T$  par rapport à  $C$  sur l'intervalle  $[0, 2]$ .

**Partie C :**

- 1) Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{3-\alpha^4}{3\alpha}$ .
- 2) Construire  $C$  et  $T$ .

**Exercice 9 :**

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) Donner le domaine de définition de  $f$  puis étudier la parité de  $f$ .
- 2) Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $D_f$  ;  $f(x)$  peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}$$

- 3) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0.
- 4) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $[-1, 0[$ . Montrer que  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$  dont on précisera le domaine de définition.
- 6)  $g^{-1}$  est-elle dérivable en  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ? justifier.
- 7) Construire  $(C_f)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans un même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 10 :**

Soit  $f$  la fonction définie par 
$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 - \frac{2x}{x^2+1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x - 1 - 3\sqrt{x^2-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 1.
- 3) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 4) Montrer que  $Cf$  admet deux asymptotes  $D_1$  et  $D_2$  à préciser. Etudier la position de  $Cf$  par rapport à  $D_1$  et  $D_2$ .
- 5) Calculer  $f'(x)$  dans les intervalles où  $f$  est dérivable.  
Etablir le tableau de variation de  $f$ .
- 6) Tracer  $Cf$  et ses asymptotes dans un repère orthonormal.
- 7) Soit  $g$  la restriction de  $f$  dans  $I = ]-\infty, 1[$ .
  - a) Montrer que  $g$  est bijective de  $I$  sur un intervalle que l'on précisera.
  - b) Montrer que  $Cf$  coupe  $\Delta: y = x$  en un point A d'abscisse  $\alpha \in ]\frac{1}{3}, \frac{3}{4}[$ .
  - c) Soit  $g^{-1}$  la réciproque de  $g$ . Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en 2 et calculer  $(g^{-1})'(2)$ .
  - d) Tracer la courbe  $Cg^{-1}$  et  $Cg$  dans le même repère.

Initié par **Youssof WADE** et comptant en son sein des **professeurs** et **étudiants**, **SCIENCE EN HERBE** est un projet qui vient jouer sa partition pour la valorisation des études scientifiques au Sénégal. En effet ce projet compte trois volets dont l'un est la création d'un **site web** ou de la classe de quatrième à la terminale il y' aura beaucoup de bagages en **MATHS**, **PC** et **SVT** (cours, série d'exercice, devoir, sujets BFEM, BAC et concours, correction, etc). Et ainsi le lancement de ce site web est prévu en **décembre 2017**.