Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right) dx ; \quad b) \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{x} \right) dx ; \quad c) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \ln(1 + \cos) dx$$

$$d) \int_0^1 \frac{2e^{2x} dx}{(1 + e^{2x}) \ln(1 + e^{2x})} ; \quad e) \int_1^n (|x-1| + |x-2| + \dots + |x-n|) dx, \quad n \in \mathbb{N}^* ;$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx ; \quad g) \int_0^4 |x-2| dx ; \quad h) \int_{-1}^2 (x - |x-1|) dx ;$$

$$i) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx ; \quad j) \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx ; \quad k) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx ; \quad l) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x - \sin x}{x} dx$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^4 x$.

- 1) Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.
- 2) Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.
- 3) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) dx$.

Exercice 3 :

- 1) Sans calculer les intégrales, justifier les égalités suivantes :

$$\int_{-1}^1 \sin(|1-2x| - |1+2x|) dx = 0 ; \quad \int_{-1}^2 \frac{2}{2+|x|} dx = \int_1^2 \frac{x}{1+x} dx .$$

- 2) a) À l'aide de changement de variable affine, Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sqrt{2x+1} dx ; \quad I_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}} dx$$

- b) Prouver que $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(a+b-t) dt$.

$$\text{En déduire l'intégrale } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\cos t} - \sqrt{\sin t}) dt .$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

1) Soit $J = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}} dx$.

a) calculer $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduire J .

2) a) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.

b) Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n-1$. En utilisant les variations de f sur $[1, +\infty[$,

Montrer que :
$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

3) En déduire que : $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$, Puis : $J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$; et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 5 :

Soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

- 1) Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$
- 2) Montrer que la fonction F est impaire et étudier ses variations.
- 3) On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$
 - a) Etudier les variations de f .
 - b) Soit $x > 0$, montrer que : $\forall t \in [x; 2x], 0 \leq f(t) \leq f(x)$
 - c) En déduire que $\forall x > 0, 0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$. Quelle est la limite de F en $+\infty$?
 - d) Donner l'allure de la courbe de F .

Exercice 6 :

A) Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $y' = x^3 - 2x^2 - 5$ 2) $y' = 3 \cos x - 2 \sin x$ 3) $y' = (2x - 1) e^x$ 4) $(x+1) y' = x - 1$
 5) $y'' = x^2 + 1 - 2e^x$ 6) $y'' = \sin 2x - \cos 3x$

B) a) Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $y'' - y' - 2y = 0$ 2) $y'' + w^2 y = 0$ 3) $y'' - w^2 y = 0$ 4) $y'' + y' + y = 0$
 5) $y'' + 4y' + 4y = 0$ 6) $y'' = 0$ 7) $4y'' + 25y = 0$

b) Pour chacune des équations différentielles de la question précédente, donner la solution particulière qui vérifie les conditions suivantes : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 7 :

- 1- Résoudre les équations différentielles :
 - a) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$; b) $y' + y = xe^{-x}$; c) $y' - y = \sin x$;
e) $y' - y = e^x \ln x$
 - 2- Résoudre l'équation différentielle: $4y'' - 12y' + 9y = (9x + 3)e^{3x}$
 - 3- Soit l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$ (1)
 - a) Vérifier que la fonction f telle que : $f(x) = e^{-x} \ln x$ est solution de (1)
 - b) En déduire la solution générale de (1)

Exercice 8 :

Dans cet exercice on cherche à calculer l'intégrale : $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin(2x) + e^{-x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx$ à l'aide d'une équation différentielle.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$ (E)
2. On considère l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$ (E')

a. Déterminer deux réels a et b pour que la fonction f_1 définie par :

$\forall x \in \mathbb{R} f_1(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x)$ soit solution de (E')

b. f désignant une fonction numérique, on désigne par g la fonction $f - f_1$.

Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E).

c. En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'équation (E').

3. a. Vérifier que la solution de (E') telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0) = 2$ est

$$f(x) = \sin(2x) + e^{-x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

b. Utiliser (E') pour trouver l'ensemble des primitives F de f .

c. En déduire la valeur de l'intégrale I .

Problème 1 :

Partie A

1. Déterminer les solutions h sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
 - a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $\phi : x \mapsto ax + b$ soit solution de (F).
 - b. Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si, et seulement si, $f - \phi$ est solution de (E).
 - c. En déduire toutes les solutions de (F)
 - d. Donner la solution f de (F) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

On appelle C la courbe représentative de f.

On se propose d'étudier cette fonction ainsi l'équation $f(x) = 0$.

1. a. Calculer la fonction f' dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f' sur $[0, +\infty[$. Indiquer la limite de f' en $+\infty$. En déduire le signe de f' sur $[0, +\infty[$.
b. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$. Indiquer la limite de f en $+\infty$.
c. Montrer que C admet une asymptote d que l'on déterminera.
2. Construire d et C sur un même graphique.
 - a. Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0, +\infty[$ une solution et une seule. On note α cette solution.
 - b. Justifier l'encadrement $1 \leq \alpha \leq 2$.

Partie C

On se propose d'étudier une méthode d'approximation de α

On observe pour cela que α est l'unique solution de l'équation de l'équation $g(x) = x$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1. Etudier les variations de g sur J. on ne demande pas de construire sa courbe représentative. En déduire que pour tout élément x de J, $g(x)$ appartient encore à J.

2. Montrer que pour tout x de J, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduire que pour tout x de J, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha|$.

3. Soit (u_n) la suite d'éléments de J définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
Pour tout entier n, positif non nul.

a. montrer que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |u_n - \alpha|$.

b. En déduire que pour tout entier n, positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

d. Déterminer une indice p pour lequel on est sûr d'avoir $|u_p - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Calculer u_p à l'aide de votre calculatrice (on donnera la partie entière et les trois premières décimales)

Problème 2 :

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ si $t \in]0, 1[$.

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le but du problème

est d'étudier f et de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t) dt$.

Partie A : Etude de f

1. a. Montrer que f est continue en 0 et en 1.
b. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le même signe

que $\varphi(t)$ où φ est la fonction définie sur $]0, 1[$ par $\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$.

c. Etudier les variations puis le signe de φ . En déduire le signe de f' .

1. Etudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on déduire pour la tangente à C au point O ?

2. a. Prouver que, pour tout élément u de $]0, \frac{1}{2}[$, $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$. En déduire que

$$0 \leq -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^3}{3}.$$

b. Soit g la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Prouver que, pour tout élément h

$$\text{de }]-\frac{1}{2}, 0], 0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}.$$

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.

c. En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe C (unité graphique : 10cm).

Partie B : Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de $]0, 1]$, on pose $I(x) = \int_x^1 f(t) dt$ et $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales.)

1. Soit K la fonction définie sur $]0, 1]$ par $K(x) = J(x^2) - J(x)$.

a. Montrer que K est dérivable sur $]0, 1]$ et que $K'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - 2f(x^2)]$.

b. Prouver que, pour tout élément x de $]0, 1]$, $f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$.

c. En déduire que, pour tout élément x de $]0, 1]$, $I(x) = \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt$. (1)

2. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(-\ln t)$ sur $]0, 1[$, $\int_{x^2}^x \frac{-1}{t \ln t} dt = \ln 2$. (2)

3. Prouver que, pour tout élément x de $]0, 1[$ et tout élément t de $]0, x[$, $0 \leq -\frac{1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}$.

En déduire que, pour tout élément x de $]0, 1[$, $0 \leq \left| \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln t} \right| \leq \frac{-x}{\ln x}$. (3)

4. A partir de (1), (2) et (3) déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0.

5. Etablir que, pour tout élément x de $]0, 1]$, $I - I(x) = \int_0^x f(t) dt$. En déduire que

$$0 \leq I - I(x) \leq x$$

6. Prouver finalement que $I = \ln 2$.