

DEVOIR N°1-1: LIMITES, CONTINUITES ET DERIVATION

DUREE : 1H30mn

Problème 1 :Soit $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$ et $\varphi(x) = \frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}$

- 1) Etudier les variations de f et montrer que (C_f) admet un centre de symétrie.
- 2) Déterminer l'ensemble de définition de φ et calculer $\varphi(\pi - x)$.
- 3) Expliquer pourquoi on peut prendre pour domaine d'étude $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 4) Donner les variations de f' sur $[-1; 1]$, préciser l'image de $[-1; 1]$ par f' .
- 5) Montrer que $\varphi'(x) = f'(\sin x) \cos x$.
- 6- a) Montrer l'existence et l'unicité d'une racine unique α de φ' sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
b) Montrer que $\sin \alpha = -2 + \sqrt{3}$ et en déduire la valeur exacte de $\varphi(\alpha)$.
- 7) Etudier les variations de φ tracer sa courbe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (unité 10 cm)
- 8) Montrer que $\varphi(x) = x$ admet une unique solution x_0 dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 9) Montrer que x_0 est la seule solution de $\varphi(x) = x$ dans $\mathbb{R}$.
- 10) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$
 - a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
 - b) Montrer que $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.
 - c) Montrer que $\left|u_{n+1} - x_0\right| \leq \frac{2}{3} \left|u_n - x_0\right|$ en déduire la convergence de (u_n) .