SCIENCE EN HERBE MATHS TERMINALE S2

SERIE N°4-2: Primitive et Calcule Integrale

EXERCICE 1 :

1) I=$\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{xlnx}$; 2) I=$\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{lnx}}{xlnx} dx$; 3) I=$\int_{1}^{2} 2^x \, dx$; 4) I=$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tanx}{cosx} dx$; 5) I=$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (cos^4 + 2sin^2x) \, dx$; 6) I=$\int_{0}^{ln2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$; 7) I=$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2-x)e^x \, dx$; 8) I=$\int_{-1}^{0} \sqrt{x+1} \, dx$; 9) I=$\int_{-1}^{0} (x^2-6x)(x-3)^2 dx$; 10) I=$\int_{0}^{1} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$.

EXERCICE 2 :

Déterminer la primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

1) f: x→ $\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; I=R ; 2) f: x→ (2x+1)(x^2+x+1) ; I=R ; 3) f: x→ sinx+ xcosx ; I=R ; 4) f: x→ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; I=$]-1\,,1[$; 5) f: x→ $\frac{1}{sin^2x}$; I=$]0\,,\pi[$; 6) f: x→ $\frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; I=$]-2\,,0[$

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction définie sur R par : f(x)=xcosx

1) Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur R par : g(x)=xsinx

2) En déduire une primitive de f sur R

EXERCICE 4 :

Soit la fonction f définie sur R par f(x)=acosx + bcos^3x ou a et b sont des réels.

1) Calculer f'(x) et f''(x)

2) Comparer f(x) et f''(x)

EXERCICE 5 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I=$]-\infty, 2[$ par : f(x)= $\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

1) Déterminer les réels a et b, tels que pour tout réel x de l'intervalle I=$]-\infty, 2[$: f(x)= a + $\frac{b}{(x-2)^2}$

2) En déduire la primitive de f sur l'intervalle I=$]-\infty, 2[$ qui s'annule en x=1

EXERCICE 6 :

1) Déterminer une primitive sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction : x → $\frac{1}{cos^2x}$

2) On considère la fonction G, définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par : G(x)= $\frac{sinx}{cos^3x}$

Montrer que G est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, et que G'(x)= $\frac{3}{cos^4x}$ - $\frac{2}{cos^2x}$

3) En déduire une primitive, sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, de la fonction f : x → $\frac{1}{cos^4x}$

EXERCICE 7 :

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par : f(x)= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, F la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0 , et g la fonction definie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x)= F(sinx)

Démontrer que g'(x)=1 sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et en déduire que F (sinx)=x pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

EXERCICE 8 :

On considère la fonction f définie par : f(x)= $\frac{cosx-sinx}{cosx+sinx}$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$

1) Soit g l'application de R dans R définie par : g(x)= sinx + cosx

a) Calculer g'(x)

b) Montrer que pour tout x réel g(x) peut s'écrire sous la forme g(x)= $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

c) En déduire les solutions dans R de l'équation g(x)=0

2) Justifier que f est définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ puis calculer la valeur moyenne de f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$

EXERCICE 9:

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{2t}\cos(2t)\,dt = \frac{1}{4}$

2) On pose I= $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos^2(t)dt$ et J= $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\sin^2(t)dt$

a) Calculer I + J

b) Calculer I - J

c) En déduire I et J

EXERCICE 10 :

On considère les intégrales suivantes : I= $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2.\cos^4(t)dt$ et J= $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^4.\cos^2(t)dt$

Calculer I + J et I - J .En déduire les valeurs de I et J

EXERCICE 11 :

On considère la fonction f définie par : f(x)= $\frac{2x+5}{(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a et b tels que ∀ x ∈ R - $\{-1\}$; f(x)= $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$

2) En déduire la valeur de I= $\int_0^3 \frac{2x+1}{(x+1)^2}dt$

EXERCICE 12 :

On pose $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{-t+1}\,$dt

1)a) Calculer I_0

b) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}

2) Calculer I_1 et I_2

EXERCICE 13 :

1) Calculer $I_0 = \int_0^1 e^t$dt et I=$\int_0^1 te^t$dt

2) Pour tout entiers naturel n, non nul on pose $I_n = \int_0^1 t^n\, e^t$ dt

a) Montrer que $(I_n)_n$ est decroissante et que qu'elle est convergente

b) Montrer au moyen d'une intégration par parties une relation entre I_n et I_{n+1}

b) Déterminer la limite de (I_n) quand n tend vers +∞

c) Utiliser 2 b) pour calculer I_3 .

EXERCICE 14 :

On se pose de calculer l'intégrale suivante : J=$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

1) Calculer les intégrales suivantes : A= $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ et B= $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

2) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout point n ≥ 0 on ait $\frac{1}{(1+t)^2} = $ a + $\frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ (1)

3) En posant t= e^x dans (1), calculer I= $\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$

4) Exprimer J en fonction de I à l'aide d'une intégration par parties .En déduire la valeur de J.

EXERCICE 15 :

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes : I= $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$; J= $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ et K=$\int_0^1 \sqrt{x^2+2}$.dx

1) Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par f(x)= ln(x+$\sqrt{x^2+2}$)

a) Calculer la dérivée de la fonction g définie par g(x)=$\sqrt{x^2+2}$ .En deduire la derivee f' de f.

b) Calculer I

2) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que J + 2I = K , à l'aide d'une intégration par parties portant sur K ; montrer que $\sqrt{3}$ - J - = K.

En déduire les valeurs de J et K.