SCIENCE EN HERBE MATHS TERMINALE S1 & S3

SERIE N°1-1: ARITHMETIQUE

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel. On pose $A = n^4 + n^2 + 1$.

1) En remarquant que : $A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2$, Montrer que A peut s'écrire comme produit de deux facteurs du second degré.

2) On pose $a = n^2 + n + 1 \, et \, b = n^2 - n + 1$.

a) démontrer que a et b sont impaires.

b) Soit d un diviseur commun de a et b. En remarquant que si d divise a et b, il divise leur somme et leur différence, démontrer que d divise 2n et $2\left(n^2 + 1\right)$.

c) Montrer que n et $n^2 + 1$ sont premiers entre eux.

d) Déduisez-en que a et b sont premiers entre eux.

Exercice 2 : reconnaître un nombre premier

L'algorithme : D'après la propriété « tout nombre non premier a au moins, un diviseur dont le carré lui est inférieur. Par suite :

Un nombre N est premier quant il n'est divisible par aucun nombre premier dont le carré lui est inférieur.

Cette propriété est facile à mettre en œuvre si l'on connaît la liste des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{N}$. Appliquer la méthode pour savoir si le nombre 4993 est premier.

Exercice 3 : Le petit Théorème de FERMAT:

Soit *p* un entier naturel premier et *n* un entier strictement compris entre 0 et *p*.

a : Montrez que C_p^n est divisible par p.

b : Montrez que, pour tout entier naturel *a*, $(a + 1)^p - a^p - 1$ est divisible par *p*.

c : Montrez que, pour tout *b* entier naturel, si $(b^p - b)$ est divisible par *p* alors $(b + 1)^p - (b + 1)$ l'est aussi.

d : Déduisez-en le petit théorème de Fermat:

"Pour tout entier *p* premier et tout *a* entier , $a^p \equiv a$ [*p*] ".

e: Montrez que *p* est premier si et seulement si pour tout $r \in \{1 ; 2 ; ... ; p - 1\}$ on a $r^{p-1} \equiv 1$ [*p*] .

Exercice 4 :

1) Soit k un entier naturel. Justifiez les congruences : $3^{2k} + 1 \equiv 2[8] \, et \, 3^{2k+1} \equiv 4[8]$.

2) On considère l'équation (E), à inconnues n et m entier naturels : $2^m - 3^n = 1$

a) Montrer qu'il n'y a pas de solution telle que n soit paire (utiliser 1))

b) Démontrer de même que la seule solution de (E) est le couple (2, 1).

Exercice 5 :

Vous savez que si un nombre A est divisible par deux entiers a et b premiers entre eux, il est divisible par le produit ab. Utiliser cette propriété pour démontrer que quel que soit l'entier n :

a) le nombre $n^2 - n$ est divisible par 6 ;

b) le nombre $n^5 - n$ est divisible par 30 ;

c) le nombre $n^7 - n$ est divisible par 42 ;

Exercice 6 :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres
$a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1) Montrer, après factorisation, que a et b sont divisibles par n − 4.

2) On pose a = 2n + 1 et b = n + 3. On note d le pgcd de a et b.

a) Etablir une relation entre a et b indépendante de n.

b) Démontrer que 5 divise d.

c) Démontrer que les nombres a et b sont multiples de 5 si et seulement si (n − 2) est multiple de 5.

3) Montrer que 2n + 1 et n sont premiers entre eux.

4) a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le pgcd de a et b. (On pourra utiliser les résultats des questions 2.c. et 3.)

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers n = 11 et n = 12.

Exercice 7 :

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times 10^n - 1,\ b_n = 2\times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2\times 10^n + 1.$$

1) a) Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à100 donné ci-dessous que b_3 est premier.

d) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

e) Montrer que PGCD (b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2) En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation (1) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a) Justifier le fait que (1) a au moins une solution.

b) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

c) Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Exercice 8 :

1) On considère l'équation (E) : 6x + 7y = 57 où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u , v) tel que 6u + 7v = 1.

En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).

b) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).2. Soit (O ; i , j , k) un repère orthonormal de l'espace. On considère le plan P d'équation : 6x + 7y + 8z = 57.

2) On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan (O; i , j).

a) Monter qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels.

b) Déterminer les coordonnées de ce point.

3) On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a) Montrer que l'entier y est impair.

b) On pose y = 2p + 1 où p est un entier naturel.

Monter que le reste dans la division euclidienne de p + z par 3 est égal à 1.

c) On pose p + z = 3q + 1 où q est un entier naturel.

Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : x + p + 4q = 7

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d) En déduire les coordonnées de tous les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Exercice 9 :

Soit deux entiers a et b premiers entre eux, tels que b soit égal au produit $b_1.b_2$ et où $b_1 \; et \, b_2$ sont premiers entre eux.

1) Montrer, en appliquant l'identité qu'il existe, qu'il existe deux entiers $a_1 \; et \, a_2$ tels que

$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}$.

2) Déduisez-en qu'il existe des entiers q, r_1 et r_2 tels que $\frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} \; où \, 0 \leq r_1 \prec b_1 \; et \, 0 \leq r_2 \prec b_2$.

3) Appliquer le résultat à la fraction $\frac{219}{143}$.

Problème 1 :

Partie A :

1) Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2) Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B :

Il s'agit de résoudre dans Z le système : $(S)\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$.

1) Démontrer qu'il existe couple (u,v) d'entiers d'entier relatifs tel que : $19u + 12 = 1$(on ne demande pas cette question de donner un exemple de couple). Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19v$ est solution de (S).

2) a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système équivaut à : $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$.

b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$. équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

3) a) Démontrer que le couple (u ;v) solution 19u + 12 v =1 et calculer la valeur de N correspondante.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2.b).

4) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Problème 2 :

Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13x + 10$. et l'équation (E) définie par $P(x) = 0$. On se propose de montrer que si l'une des solutions de l'équation (E) est rationnelle alors elle est entière, puis de résoudre (E).

Partie A :

1) Supposons que l'équation ait pour solution un nombre rationnelle r, représenté par la fraction irréductible $\frac{a}{b}$.

a) Montrer que $\frac{a^4}{b^4} - 4\frac{a^3}{b^3} - 8\frac{a^2}{b^2} + 13\frac{a}{b} + 10 = 0$.

b) Déduisez-en que $a^4 = 4a^3b + 8a^2b^2 - 13ab^3 - 10b^4$.

c) Montrer que b divise a et conclure que r est un entier.

2) a) Montrer que si l'équation $0 = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13x + 10$. admet une solution entière α, alors le nombre α est diviseur de 10.

b)Quelles sont les solutions entières éventuelles de (E).

Partie B :

1) Après avoir déterminé deux solutions de (E), factorisez le polynôme $P(x)$.

2) Achevez la résolution de (E).