

COMPOSITION N°2-1 DU 2nd SEMESTRE :DUREE : 4H**Exercice 1 :**

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B. les quatre faces de chacun d'eux sont notées 1 à 4. Lorsque l'on jette un dé, on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face). Pour le dé a, les quatre numéros sont tous de la même probabilité d'être cachée. Pour le dé B, la probabilité P_i de noter le numéro i est proportionnelle à i.

1. Calculer les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 pour les quatre faces de B.
2. On lance les deux dés. On note i le numéro de caché du dé A et j le numéro caché du dé B. On suppose les lancers indépendants ; on note $P(i, j)$ la probabilité de noter i pour le dé A et j pour le dé B.
 - a. Montrer que $P(1,1) = P(2,1) = P(3,1) = P(4,1) = \frac{1}{40}$
 - b. Déterminer les probabilités $P(i, j)$ pour tous les nombres entiers i et j compris entre 1 et 4.
3. On appelle Z la variable aléatoire définie par : Z(i, j) est le plus grand des nombres i et j.
Exemple : $Z(1, 2) = 2, Z(2, 1) = 2, Z(1,1) = 1$.
 - a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
 - b. Déterminer la loi de probabilité de Z et espérance mathématique E(Z).

Exercice 2 :

L'espace est orienté et muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B,

C de l'espace de coordonnées respectives dans ce repère : $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Soit le triangle $M_1M_2M_3$ défini par : $\overrightarrow{OM_1} = a\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OM_2} = b\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OM_3} = c\overrightarrow{OC}$ où a, b, c sont trois nombres réels de l'intervalle $[0;1]$.

Le but de l'exercice est de déterminer, parmi les triangles $M_1M_2M_3$, un triangle d'aire maximale.

1. Faites une figure.
2. On pose : $\vec{S}_1 = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$; $\vec{S}_2 = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}$; $\vec{S}_3 = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$; $\vec{S}_4 = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
 - a. Calculer les coordonnées de ces quatre vecteurs ainsi que leurs normes. On note S la plus grande de ces normes.
Prouver l'égalité : $\vec{S}_4 - \vec{S}_1 - \vec{S}_2 - \vec{S}_3 = \vec{0}$
 - b. On pose $\vec{T} = \frac{1}{2} \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$
Rappelez une interprétation géométrique de la norme de $\vec{T}$
 - c. Prouver l'égalité : $bc \vec{S}_1 + ca \vec{S}_2 + ab \vec{S}_3 = \vec{T}$

Montrer aussi que $\vec{T}$ s'écrit sous la forme
 $\vec{T} = (bc - x)\vec{S}_1 + (ca - x)\vec{S}_2 + (sc - x)\vec{S}_3 + x\vec{S}_4$ où x désigne un réel quelconque.

3. On suppose $a \leq c$ et $b \leq c$. En choisissant $x = ab$, prouver l'inégalité.

$$\|\vec{T}\| \leq (bc + ca - ab)S$$

Déduisez de l'inégalité $bc + ca - ab = c^2 - (c - b)(c - a)$ que $0 \leq (bc + ca - ab) \leq 1$ puis

L'inégalité $\|\vec{T}\| \leq S$.

4. Préciser, parmi les triangles $M_1M_2M_3$, un triangle dont l'aire est maximale.

Problème :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité choisie est le centimètre.

Partie A :

1. Soit (h) la conique d'équation : $y^2 - x^2 = 16$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Quelle est la nature de (h) ?

On note au sommet de (h) d'ordonnée positive. Tracer (h).

2. On pose $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y', y'' sont des réels.
 Soit R l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie
 par : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z$.

Démontrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3. Soit S l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' définie
 par : $z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)z$.

- Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite (D) d'équation :
 $y = (\sqrt{2} + 1)x$
 - Démontrer que $S = R \circ S_{(OJ)}$ où J est le point de couple de coordonnées (0; 1)
 - Déduire de ce qui précède la nature de S.
4. a. Vérifier que $R(A) = S(A)$. On note A' ce point.
 b. Démontrer que (D) coupe (H) en deux points E et F.

5. a. Démontrer que les coordonnées de M, M', M'' vérifient : $x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$

- b. En déduire que (h) a la même image par R et s. on appelle (H) cette image.

Donner la nature et une équation de (H) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6. Construire sur la même figure la courbe (h), les points A et A', la droite (D) et la courbe (H).

Partie B :

1. On note $(h+)$ l'ensemble des points de (h) d'ordonnées positives.
 - a. Démontrer que $(h+)$ est la courbe représentative de la fonction :
$$f : x \rightarrow \sqrt{x^2 + 16} \quad \text{dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$
 - b. Soit N un point de $(h+)$ d'abscisse x positive. On note $U(x)$ l'aire de la partie (Δ) du plan, limitée par la courbe $(h+)$ et les segments $[OA]$ et $[ON]$. Démontrer que pour tout réel positif ou nul x :
$$U(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 16} dt - \left(\frac{x\sqrt{x^2 + 16}}{2} \right)$$

(On ne cherchera pas à calculer $U(x)$)
 - c. Pour tout réel positif ou nul x , on pose : $G(x) = 8 \ln(x + \sqrt{x^2 + 16})$
Prouver que U et G ont la même fonction dérivée sur $[0, +\infty[$
Calculer $U(0)$ et $G(0)$.

En déduire que pour tout réel positif ou nul x :
$$U(x) = 8 \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4} \right)$$
2. Soit (C) la courbe représentative de U dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité 1cm).
(on fera un graphique séparé de celui de partie A)
 - a. Etudier le sens de variation de la fonction U sur $[0, +\infty[$
 - b. Calculer le nombre dérivé de U en 0.
Préciser l'allure de la courbe au voisinage de 0
 - c. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0; 8]$. On construira la tangente en O .

Partie C :

On appelle $(H+)$ l'ensemble des points de (H) d'ordonnées positives.

On se donne un point N' de $(H+)$ d'abscisse x' telle que : $x' \geq 2\sqrt{2}$

1. Démontrer que le point N_1 , tel que $N_1 = R^{-1}(N')$ appartient à $(h+)$ et que son abscisse x est positive.
2. Soit (Δ') la partie du plan limitée par $(H+)$, les segments $[OA']$ et $[ON']$.
Démontrer géométriquement que (Δ') et (Δ) ont la même aire.