Avril 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

Définitions et notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Si $A \subset B$ sont deux parties de $\mathbb{R}$, on note par $B \setminus A$ le complémentaire de A dans B. On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathbb{Z}_- = \{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \leq 0\}$.

On admettra le dévellopement suivant de la fonction Cotangente :

$$\forall x \in]0, \pi[, \qquad \text{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}. \tag{1}$$

Première partie.

1- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par $u_n(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$, $n \geq 1$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$, le terme $u_n(x)$ est négatif et on a $u_n(x) \sim -\dfrac{x^2}{n^2}$ quand $n \to +\infty$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc simplement sur $[0, 1[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et on a $u_n'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - n^2}$.

Soit $0 \leq a < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $r_n = \dfrac{2a}{n^2 - a^2}$. Pour tout $x \in [0, a]$, on a $|u_n'(x)| \leq r_n$ qui est le terme général d'une série numérique convergente, ainsi la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[0, a]$.

c) Soit $0 \leq a < 1$, d'après la question précédente la série de fonction $\sum u_n'$ est normalement convergente sur $[0, a]$. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, la fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

est de classe C^1 sur $[0, a]$ et on a

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Comme a est arbitrairement pris dans $[0, 1[$, on en déduit en utilisant le dévellopement (1) que F est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et

$$F'(x) = \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x}.$$

d) En intégrant la dernière égalité de la question précédente, on obtient pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = \int_0^x \left\{ \frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u} \right\} du \,,$$

comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0$, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \left[\ln \frac{\sin \pi u}{u} \right]_0^x = \ln \frac{\sin \pi x}{x} - \ln \pi = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} \,.$$

2- Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \qquad s_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, désignons par $\lfloor y \rfloor$ sa partie entière. Soit $x \in \mathbb{R}$, à partir de $n \geq \lfloor |x| \rfloor$, la suite $(|(s_n(x))|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle est convergente. De plus, pour tout $n \geq \lfloor |x| \rfloor$, $s_{n-1}(x)$ et $s_n(x)$ sont de même signe. La suite $(s_n(x))_{n\geq\lfloor |x| \rfloor}$ est alors de signe constant, donc elle est convergente.
On en déduit que la suite de fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction s.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

(i) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} s_n(x) = x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) &= x \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \left((k-x)(k+x)\right) \\ &= \frac{x}{(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} (k-x)(k+x). \end{aligned} \tag{2}$$

(ii) D'après la question précédente

$$s_n(x) = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} (k-x) \prod_{k=0}^{n} (k+x) \,,$$

il en résulte, avec des changements d'indices, que

$$s_n(x+1) \;=\; \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} (k-x-1) \prod_{k=0}^{n} (k+x+1) = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k-x) \prod_{k=1}^{n+1} (k+x) \,,$$

et pour $n > |x|$,

$$\frac{s_n(x+1)}{s_n(x)} = \frac{-x}{n-x} \times \frac{n+1+x}{x} = -\frac{n+1+x}{n-x} \,,$$

d'où l'égalité demandée.

(iii) Pour tout $n > |x|$, $s_n(x+1) = \dfrac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$. Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $s(x+1) = -s(x)$.

c) La fonction s est nulle en 0, car $s_n(0) = 0$ pour tout n.
Pour $x \in]0,1[$, on a $s_n(x) > 0$ et $\ln s_n(x) = \ln x + \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. D'après **1-, d)**, $\lim_{n\to+\infty} \ln s_n(x) = \ln x + \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi}$.
La fonction exponentielle est continue donc $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = e^{\ln \frac{\sin \pi x}{\pi}}$, soit

$$s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n = \lfloor x \rfloor$ sa partie entière. On a donc $s(x) = (-1)^n s(x-n)$ et $x - n \in [0,1[$, ainsi $s(x) = (-1)^n \dfrac{\sin \pi(x-n)}{\pi}$.
On obtient donc $s(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Deuxième partie.

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1)\dots(x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

1- Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $n \geq p+1$, $f_n(-p) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(-p) = 0$.

2- On suppose que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

a) Puisque $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \neq 0$ et

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Il s'en suit que pour tout $n \geq N_x = \max\{1, \lfloor -x \rfloor + 1\}$, $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} > 0$ et

$$\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = -x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi la série de terme général $\ln \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, définie à partir du rang N_x est convergente.

b) Pour tout $n \geq N_x$, notons

$$S_n(x) = \sum_{k=N_x}^{n} \ln \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}.$$

Par télescopage des termes, pour tout $n \geq N_x$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-N_x} \ln f_{k+N_x+1}(x) - \sum_{k=0}^{n-N_x} \ln f_{k+N_x}(x) = \ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_{N_x}(x)},$$

d'où $f_{n+1}(x) = f_{N_x}(x) e^{S_n(x)}$. Il en résulte que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f_{N_x}(x) e^{S(x)} \neq 0$, où $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

c) D'après la question précédente, et la question **1-, a)**,

$$f(x) = \begin{cases} f_{N_x}(x) e^{S(x)} \neq 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x} x f_n(x+1)$. Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $f(x) = xf(x+1)$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(1) = 1$ donc $f(1) = 1$.
En utilisant la relation $f(x) = xf(x+1)$, on établit, par récurrence sur n, que

$$f(n) = \frac{1}{(n-1)!}, \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

3- Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après (2) on a

$$\begin{aligned}
f_n(x)f_n(1-x) &= \frac{n^{-x}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k) \times \frac{n^{-1+x}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(-x+k+1) \\
&= \frac{1}{n!(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k) \times \prod_{k=1}^{n}(k-x) \\
&= \frac{n}{n+x}\frac{x}{(n!)^2}\prod_{k=1}^{n}(x+k)(k-x) \\
&= \frac{n}{n+x}s_n(x).
\end{aligned}$$

Le passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ donne la relation demandée,

$$f(x)f(1-x) = s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

4- On se propose dans cette question de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a la relation :

$$f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right). \qquad (*)$$

a) **(i)** Pour $p = 1$ la relation $(*)$ est trivialement vérifiée.

(ii) Supposons que $p \geq 2$ et $px = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $f(px) = 0$ d'après **1-**. D'autre part, remarquons que le membre de droite de l'égalité $(*)$ peut également s'écrire

$$(2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{-n+k}{p}\right)$$

et parmi les entiers $\{-n+k \ : k = 0, \cdots, p-1\}$ il en existe un, noté k_0 tel que $(-n+k_0)/p$ soit un entier de $\mathbb{Z}_-$. D'après **1-**, le terme de droite dans $(*)$ est donc nul, d'où le résultat.
Montrons la propriété utilisée : il existe $k_0 \in \{0, \cdots, p-1\}$ tel que $-n+k_0 \in p\mathbb{Z}-$. Par la division euclidienne de n par p dans $\mathbb{N}$, il existe $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ et $r \in \{0, \cdots, p-1\}$ tel que $n = pq + r$. Pour $k_0 = r$, on a $-n + k_0 = -pq$, ce qu'il fallait démontrer.

b) On suppose que $px \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$. Soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$. Par la définition de f_n, on a d'une part,

$$p^{px-1} f_{pn}(px) = \frac{p^{-1}n^{-px}}{(pn-1)!}\prod_{j=0}^{pn-1}(px+j),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right) &= \prod_{k=0}^{p-1}\left(\frac{n^{-\left(x+\frac{k}{p}\right)}}{(n-1)!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{p}+i\right)\right) \\
&= \frac{n^{-\left(px+\frac{\sum_{k=0}^{p-1}k}{p}\right)}}{[(n-1)!]^p}\frac{1}{p^{pn}}\prod_{k=0}^{p-1}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(px+k+ip)\right),
\end{aligned}$$

puis en utilisant des changement d'indices et la commutativité de la multiplication,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right) &= \frac{n^{-\left(px+\frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p}\right)}}{[(n-1)!]^p}\frac{1}{p^{pn}}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\prod_{\ell=ip}^{(i+1)p-1}(px+\ell)\right) \\
&= \frac{n^{-\left(px+\frac{p-1}{2}\right)}}{[(n-1)!]^p}\frac{1}{p^{pn}}\prod_{j=0}^{pn-1}(px+j)\,,
\end{aligned}$$

car $\cup_{i=0}^{n-1}\{ip,\cdots,(i+1)p-1\}=\{0,\cdots,np-1\}$.
Il en résulte que

$$\frac{p^{px-1}f_{pn}(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right)} = p^{pn-1}n^{\frac{p-1}{2}}\frac{[(n-1)!]^p}{(pn-1)!} := A_p(n)$$

qui est strictement positif et ne dépend pas de x.
Le terme de gauche admet une limite égale à $\dfrac{p^{px-1}f(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right)}$ lorsque $n\to+\infty$. Il en résulte que la suite $(A_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet une limite, positive ou nulle. On note $A_p=\lim\limits_{n\to+\infty}A_p(n)$, on obtient l'égalité demandée :

$$f(px)=A_p\,p^{-px+1}\prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right). \tag{3}$$

c) D'après la question **2-**, **e)**, $f(1)=1$, en écrivant la relation ci-dessus pour $x=\dfrac{1}{p}$, on a

$$f(1)=1=A_p\prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k+1}{p}\right)=A_p\prod_{k=1}^{p} f\left(\frac{k}{p}\right)=A_p\prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right).$$

Le changement d'indices $k\to p-k$ donne

$$1=A_p\prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right)=A_p\prod_{k=1}^{p-1} f\left(1-\frac{k}{p}\right).$$

Calculons A_p^2 : par l'égalité précédente et le résultat de la question **3-**, on a

$$1=A_p^2\prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right)f\left(1-\frac{k}{p}\right)=A_p^2\prod_{k=1}^{p-1}\frac{\sin\frac{k\pi}{p}}{\pi}\,,$$

ainsi

$$A_p^2=\frac{\pi^{p-1}}{\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}}.$$

d) Montrons l'identité suivante entre fonctions polynômes de la variable réelle x :

$$(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2=\prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1\right).$$

On a

$$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)\,,$$

ainsi le polynôme $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ a pour zéros complexes, les $p-1$ racines de l'unité $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ avec $k=1,\ldots,p-1$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1 &= (x-e^{\frac{2ik\pi}{p}})(x-e^{-\frac{2ik\pi}{p}}) = (x-z_k)(x-\overline{z}_k) \\
&= (x-z_k)(x-z_{p-k}).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2 &= \prod_{k=1}^{p-1}(x-z_k)(x-z_{p-k}) \\
&= \prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1\right).
\end{aligned}$$

e) En donnant à x la valeur 1, on obtient

$$\begin{aligned}
p^2 &= \prod_{k=1}^{p-1}\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{p}\right) = \prod_{k=1}^{p-1}4\sin^2\frac{k\pi}{p} \\
&= 4^{p-1}\left(\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}\right)^2.
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}>0$, il en résulte que

$$\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}=\frac{p}{2^{p-1}}.$$

Avec le dernier résultat de la question précédente, on a $A_p^2=\dfrac{(2\pi)^{p-1}}{p}$. sachant que $A_p\geq 0$, il vient $A_p=\dfrac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{\sqrt{p}}$.
Finalement, en remplaçant A_p par sa valeur dans la formule (3), on obtient la formule $(*)$.

Troisième partie.

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

1- Notons $h:\mathbb{R}\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie par $h(x,t)=e^{-t}t^{x-1}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'application $h(x,\cdot):t\mapsto h(x,t)$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.
D'autre part, pour tout $x\in\mathbb{R}$, On a $h(x,t)\underset{t\to 0}{\sim}t^{x-1}$, ainsi $h(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $x>0$, et $h(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ainsi $h(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ pour tout x.

Il en résulte que la fonction Γ est définie sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.
On vérifie que h est continue sur $]0, +\infty[^2$, ainsi que chacune de ses dérivées partielles et on a

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k} : (x,t) \mapsto \ln^k t \; e^{-t} t^{x-1}.$$

Considérons un segment $[a,b] \subset \mathcal{D}$ et notons $g_{a,b}(t) = \big(t^{a-1} + t^{b-1}\big)e^{-t}$. Pour tout $(x,t) \in [a,b] \times]0, +\infty[$, on a

$$|h(x,t)| \leq g_{a,b}(t) \quad \text{ et } \quad \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \max\{|\ln^k(a)|, |\ln^k(b)|\} g_{a,b}(t)\,.$$

Comme la fonction $g_{a,b}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, il résulte des théorèmes sur la continuité et la dérivation des intégrales à paramètre, sur un intervalle, que Γ est indéfiniment dérivable sur $[a,b]$. Comme a, b sont arbitrairement choisis sur $\mathcal{D}$, on en déduit que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

2- Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt.$$

a) Soit $g_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\, du$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.
Soit $n \geq 1$ et $x > 0$. Par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{u^x}{x}\, du \\ &= \frac{n}{x} g_{n-1}(x+1). \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$g_n(x) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{x(x+1)\dots(x+k-1)} g_{n-k}(x+k).$$

Par ailleurs, pour tout $y \in]0, +\infty[$,

$$g_0(y) = \int_0^t u^{y-1} du = \left[\frac{1}{y} u^y\right]_0^1 = \frac{1}{y}\,,$$

d'où $g_n(x) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $t = nu$ donne $g_n(x) = n^{-x} G_n(x)$.
En remplaçant par la valeur de $f_n(x)$, non nulle, on obtient

$$G_n(x) = \frac{n}{(n+x) f_n(x)}.$$

c) On étudiant la fonction $\varphi(x) = e^x - 1 - x$, on vérifie que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$e^{\frac{t}{n}} \geq 1 + \frac{t}{n} \geq 0 \quad \text{ et } \quad e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \geq 0$$

pour tout $t \in [0, n]$.
En élevant à la puissance n, on obtient les inégalités demandées :

$$e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad \text{ et } \quad e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n.$$

On en déduit que, pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].$$

d) Soit $a \in [0, 1]$. L'inégalité $(1-a)^n \geq 1 - na$ est vérifiée pour $n = 1$.
Supposons-la vérifiée pour $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}(1-a)^{n+1} &= (1-a)(1-a)^n \\ &\geq (1-a)(1-na) = 1 - (n+1)a + na^2 \\ &\geq 1 - (n+1)a.\end{aligned}$$

Il en résulte, par récurrence sur n, que l'on a $(1-a)^n \geq 1 - na$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant la question précédente, on obtient

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - n\frac{t^2}{n^2}\right)\right] = \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

e) Pour $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1}\, dt \\ &= \Gamma(x) - G_n(x) - \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \\ &\leq \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n}\, dt.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$0 \leq \Gamma(x) - G_n(x) \leq \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt + \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n}\, dt.$$

L'existence de $\Gamma(x)$ implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = 0$.
Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n}\, dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n}$ qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \Gamma(x)$.
D'après la question **2-**, **a)**, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, ainsi $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(x)}$.

AVRIL 2013

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur R^* par : $f(x) = \dfrac{Ln(1+x^2)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction f (on précisera l'allure du graphe au voisinage de l'origine).

On peut remarquer que cette fonction est impaire (graphe symétrique par rapport à l'origine) et faire l'étude que pour les valeurs positives. De plus, on peut donc prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0)=0$.

La dérivée de f est égale à : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (1+x^2)Ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$ et elle est nulle quand son numérateur est nul ou encore $2(t-1) - tLnt = 0$ en posant $t = 1+x^2$, $t \geq 1$.
Soit $z(t) = 2(t-1) - tLnt = 0$, $z'(t) = 1 - Lnt$ qui est nulle pour $t = e$.
On trouve $z(e) = e - 2 > 0$ et par exemple $z(e^2) = -2 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur t_0 dans l'intervalle $]e,e^2[$ qui annule $z(t)$.
Soit $x_0 = \sqrt{t_0 - 1}$. La fonction z est croissante sur l'intervalle $\left]0, x_0\right[$ et décroissante ensuite.
La fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]0, \sqrt{e-1}\right[$, puis décroissante. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et la pente à l'origine est donnée par $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

2. Calculer $I = \int_0^1 x^2 \, f(x)\,dx$. On calcule par intégration par parties.

$$I = \int_0^1 x\,Ln(1+x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} Ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = Ln\sqrt{2} - \int_0^1 (x - \frac{x}{1+x^2})\,dx$$

$$I = Ln\sqrt{2} - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}Ln(1+x^2)\right]_0^1 = Ln\,2 - \frac{1}{2}$$

3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n strictement positif.

Etudier la convergence de cette suite et calculer sa limite, si elle existe.

On vérifie facilement par récurrence que la suite est strictement positive.

On a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{Ln(1+u_n^2) - u_n^2}{u_n} < 0$. La suite est décroissante et minorée, donc convergente vers une limite *l* solution de l'équation : $l = f(l)$, car *f* est continue, avec son prolongement par continuité en 0, d'où $l = 0$

Exercice n° 2

1. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_0^1 \frac{|Ln\, x|^\beta}{(1-x)^\alpha} dx \ .$$

Cette intégrale présente un problème en zéro pour le numérateur et un problème en 1 pour le dénominateur. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{|Ln\, x|^\beta}{(1-x)^\alpha} dx$ est convergente en 0 pour tout β et en 1, $Ln\, x \approx x-1$ est convergente en 1 pour $\alpha < \beta + 1$

2. En déduire que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{Ln\, x}{\sqrt{(1-x)}} dx$ est convergente et calculer *I*.

L'intégrale est convergente d'après la question précédente. On pose $t = \sqrt{1-x}$,

$I = 2\displaystyle\int_0^1 Ln(1-t^2)\, dt = 2\int_0^1 Ln(1-t)\, dt + 2\int_0^1 Ln(1+t)\, dt$, puis en posant $u = 1-t$ dans la première intégrale et $u = 1+t$ dans la deuxième intégrale, on obtient $I = 4(Ln 2 - 1)$

Une primitive de *Lnx* est *xLnx-x.*

Exercice n° 3

1. Etudier la convergence de la suite (u_n) de terme général $u_n = \int_1^e x(Lnx)^n dx$

Solution : $u_{n+1} - u_n = \int_1^e x(Lnx)^n (Ln\,x - 1)dx < 0$. La suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

2. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_0^1 x^n\; Ln(x+1)dx$

$v_{n+1} - v_n = \int_0^1 x^n\,(x-1)\,Ln(x+1)dx < 0$ et la suite est décroissante, minorée par zéro, elle converge. On a, par intégration par parties : $v_n = \dfrac{Ln2}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx$ qui tend vers zéro.

Exercice n° 4

Soient $E = C^1(R,R)$ et $F = \{f \in E \;/\; f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que *F* est un sous espace vectoriel de *E*.
   Evident.

2. Déterminer un supplémentaire *G* de *F* dans *E*. Les fonctions *h* de *E* qui ne sont pas dans *F* vérifient $h(0) \neq 0$ *ou* $h^{'}(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes et les applications linéaires sont ainsi.
   Soit $G = \{f \in E \;/\; f(x) = ax + b\}$. Montrons que *G* est un supplémentaire de *F*.
   Soit $f \in F \cap G$, alors $f(x) = ax + b$, *f(0)=b*, et $f^{'}(0) = a$. Donc *a*=*b*=0 (car $f \in F$) et l'intersection est réduite à zéro.
   Soit $h \in E$, on pose : $f(x) = h(x) - h(0) - h^{'}(0)\,x$ et $f \in F$. Et la fonction $g(x) = h(0) + h^{'}(0)\,x$ appartient à *G* et $h = f + g$.
   L'espace *G* est engendré par les fonctions $e_1(x) = 1$ et $e_2(x) = x$ et donc *G* est de dimension 2.

3. Soit la fonction *h* définie par : $h(x) = x^2 + x + 1$. Quelle est sa projection orthogonale sur *G* ?
   On peut se restreindre à l'espace vectoriel des fonctions du second degré et naturellement la projection de *h* sur *G* est la fonction *x*+1 (on peut le vérifier avec la matrice de la projection orthogonale sur *G*).

Exercice n° 5

Soient $f_n(x)=\int_0^x (1-t^2)^n\,dt$ et $F_n(x)=\int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)}dt$ où n est un entier naturel et x un nombre réel strictement positif.

1. Calculer $f_n(1)$

$$f_n(1)=\left[t(1-t^2)^n\right]_0^1+2n\int_0^1 t^2\,(1-t^2)^{n-1}\,dt=-2n\;f_n(1)+2n\;f_{n-1}(1)$$

Et $f_n(1)=\frac{2n}{2n+1}f_{n-1}(1)$ et on obtient : $f_n(1)=\frac{(2^n\,n!)^2}{(2n+1)!}$

2. Montrer que $\int_0^1 (f_n(1)-f_n(t))\,dt=\frac{1}{2(n+1)}$

$$\int_0^1 (f_n(1)-f_n(t))\,dt=\int_0^1\int_t^1 (1-x^2)^n\,dx\,dt=\frac{1}{2}\sum_k C_n^k\,\frac{(-1)^k}{k+1}\text{ et }\int_0^1 (1-x)^n\,dx=\frac{1}{(n+1)}=\sum_k C_n^k\,\frac{(-1)^k}{k+1}$$

En conclusion $\int_0^1 (f_n(1)-f_n(t))\,dt=\frac{1}{2(n+1)}$

3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_n=1-F_n(1)$

$$u_n=\int_0^1 \frac{f_n(1)-f_n(t)}{f_n(1)}dt=\frac{1}{f_n(1)}\times\frac{1}{2(n+1)}$$

On vérifie que $u_{n+1}=\frac{2n+3}{2n+4}u_n$ et la suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

Exercice n° 6

Soit A une partie non vide de R^2 et $a\in A$. On pose,

$$T(A,a)=\left\{u\in R^2\,/\,\exists(x_n)\in A,\ \exists\lambda_n>0,\ x_n\to a,\ \lambda_n(x_n-a)\to u\right\}$$

1. Montrer que $(0,0)\in T(A,a)$

Il suffit de prendre $x_n=a$ et $\lambda_n=1$.

2. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble est stable par homothétie positive.

Soit $u \in T(A,a)$, $\forall \mu > 0$, $\mu \lambda_n (x_n - a) \to \mu u$ et $\mu u \in T(A,a)$, donc cet ensemble est stable par homothétie positive.

3. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble fermé de R^2.

Soit u^i une suite de points de $T(A,a)$ et $u = \underset{i}{Lim}\, u^i$. Comme $u^i \in T(A,a)$, $\exists \lambda^i_{pi} > 0$, $\exists x^i_{pi} \in A$, $x^i_{pi} \to a$,
$\lambda^i_{pi}(x^i_{pi} - a) \to u^i$. Pour tout n, $\exists k_n > 0$ tel que $\left|\lambda^n_{kn}(x^n_{kn} - a) - u^n\right| < \dfrac{1}{n}$ et alors $x^n_{kn} \to a$,
$\lambda^n_{kn}(x^n_{kn} - a) \to u$ et $u \in T(A,a)$, ce qui montre que $T(A,a)$ est un ensemble fermé de R^2.

4. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble convexe de R^2 si A est une partie convexe

$$\exists (u_n) \in A,\ \exists \lambda_n > 0,\ u_n \to a,\ \lambda_n(u_n - a) \to u$$
$$\exists (v_n) \in A,\ \exists \alpha_n > 0,\ v_n \to a,\ \alpha_n(v_n - a) \to v \text{ et}$$
$$\lambda \lambda_n (u_n - a) + (1-\lambda)\alpha_n (v_n - a) \to \lambda u + (1-\lambda) v.$$

Par ailleurs,

$\lambda \lambda_n (u_n - a) + (1-\lambda)\alpha_n (v_n - a) = (\lambda\lambda_n + (1-\lambda)\alpha_n)\left(\dfrac{\lambda\lambda_n u_n + (1-\lambda)\alpha_n v_n}{\lambda\lambda_n + (1-\lambda)\alpha_n} - a\right)$ ou encore,
$\lambda \lambda_n (u_n - a) + (1-\lambda)\alpha_n (v_n - a) = \beta_n (w_n - a)$ avec
$\beta_n (w_n - a) \to \lambda u + (1-\lambda) v$,
$w_n \in A$, car A est une partie convexe de R^2,
$w_n = \dfrac{\lambda\lambda_n u_n + (1-\lambda)\alpha_n v_n}{\lambda\lambda_n + (1-\lambda)\alpha_n} \to a$ car $\|w_n - a\| \le Max(\|u_n - a\|, \|v_n - a\|)$.

En conclusion $\lambda u + (1-\lambda) v \in T(A,a)$

5. Soit $A = R^+ \times R^+$, expliciter $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$.

On vérifie facilement que $T(A,a) = R^+ \times R^+$

6. Soit $A = \{(x,y) \in R^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$, expliciter $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$.

Soit $u = (x,y) \in T(A,a)$,
$\exists (x_n, y_n) \in A,\ \exists \lambda_n > 0, x_n \geq 0, y_n \geq 0, y_n \geq x_n^2, x_n \geq y_n^2, \lambda_n x_n \to x, \lambda_n y_n \to y$

En multipliant par λ_n les inégalités, on obtient :

$y_n \geq x_n^2 \Rightarrow \lambda_n (y_n - x_n^2) \geq 0 \Rightarrow \lambda_n\, y_n - \lambda_n x_n\, x_n \geq 0$ et par passage à la limite, $y \geq 0$. De même, $x \geq 0$. On a donc $T(A,a) \subset R^+ \times R^+$. Réciproquement, on pose, pour $(x,y) \in R^+ \times R^+$, $x_n = x/n, y_n = y/n, \lambda_n = n$ et on vérifie que cette suite (x_n, y_n) appartient à l'ensemble A pour n grand.